

APPENDICES

Appendix 1: Pilot test

Teste de Ensaio

Duração: 50 min

Nome: _____ **Data:** ____/____/____

Qualificações: _____

Formação Profissional (Caso aplicável): _____

Nota: Este teste não serve para avaliação do estudante. Apenas se destina a procurar saber quais são as experiências dos estudantes em relação a geometria e a álgebra aprendidas na escola secundária. Por favor responda as questões o mais detalhado possível.

Exercício 1

Seja dado um triângulo $[ABC]$, onde o segmento DE bisecta os lados AB e AC .

- Construa o triângulo $[ABC]$ e o segmento DE .
- Conjectura a(s) relação(ões) entre os segmentos DE e BC .
- Demonstre essa(s) relação(ões).

Exercício 2

Seja dado um polígono com n vértices.

- Deduza a fórmula do número total de diagonais do polígono.
- Calcule o número total de diagonais dum polígono de 70 vértices.

Obrigado pela vossa cooperação! Bom trabalho!

(Translation)

Due time: 50 mn

Date: 06/10/2004

Name (facultative): _____

Date of Birth: _____

Formação Académica: _____

Qualifications: _____

Observations:

1. The test is not for assessment purposes.
2. It is ensured the confidentiality of data.
3. Justify all steps of resolution.

Task 1:

In triangle $[ABC]$, DE bisects AB and AC .

- a. Sketch $[ABC]$ and DE .
- b. What relation(s) can you write connecting DE and BC ?
- c. Prove the relation(s).

Task 2:

A polygon possesses n vertexes.

- d. Write a formula, which indicates the total number of its diagonals.
- e. Determine the number of diagonals of 70- vertex polygon.

Thanks for your cooperation!

Good work!

Appendix 2: Diagnostic Test

Teste Diagnóstico

Tempo: 60 min

Nome: _____

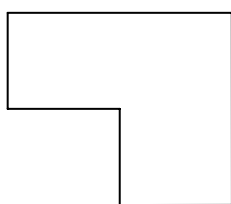
Data: 08/03/2005

Habilitações: _____

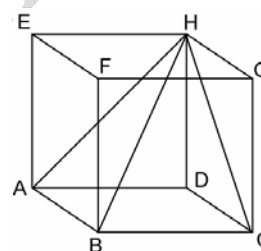
Formação Pedagógica (Caso seja aplicável): _____

Observação: Este teste não conta para a avaliação. O objetivo do mesmo é verificar qual é a sua experiência escolar em Geometria e Álgebra. Por favor responda as questões o mais detalhadamente possível.

1. Enuncie e demonstre o famoso “Teorema de Pitágoras” (sobre as medidas dos lados de um triângulo retângulo).
2. Considerando a figura abaixo.
3. Observe o cubo [ABCDEFGH] abaixo.



Subdivida a figura em quatro partes congruentes.



Caberá no cubo mais alguma pirâmide congruente a [ABCDH] ? Se sim, apresente-a(s).

4. Um quadrilátero tem duas diagonais, um pentágono tem cinco, um hexágono tem ... diagonais. Determine (uma expressão para) o número total de diagonais de um polígono de n lados.

(Translation)

Diagnostic Test

Due Time: 60 min

Name: _____

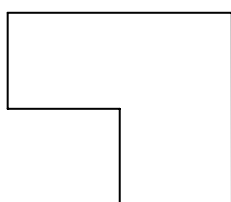
Date: 08/03/2005

Qualifications: _____

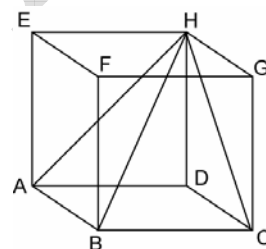
Pedagógic Training (When applicable): _____

Remark: The test is not for assessment purposes. It is intended to help us know your experiences with school geometry and algebra. Please, answer the questions in as much detail as possible.

1. What is the Pythagorean Theorem? Please, demonstrate this Theorem. (Use the right triangle).
2. Consider the figure below.
3. Observe cube [ABCDEFGH] below.



Divide the figure in four congruent parts.



Can you insert into the cube any other(s) pyramid(s) congruent to [ABCDH]? If 'yes', represent it (them).

4. Quadrilateral possesses two diagonals, pentagon five diagonals, and hexagon possesses... diagonals. Determine an algebraic expression for the total number of the diagonals of a polygon with n sides.

Appendix 3: Recall and Hinting Task

I. Perguntas Chave:

1. Que tipo de conhecimento usou neste exercício? (Free Recall Task)
2. Pode explicar porque usou este tipo de conhecimento neste exercício? (FRT)
3. Poderia usar um outro tipo de conhecimento para resolver o mesmo exercício? (FRT)
4. Como podes usar este conceito para resolver este exercício? (Hinting Task)
5. Qual é a relação entre este conceito e o outro? (HT)

II. Explicação:

Um certo número de exercícios será escolhido dos testes que forem dados aos estudantes durante a Geometria Euclidiana e a Geometria Analítica para serem usados nas várias séries de entrevistas que terão lugar nesta pesquisa. Nestes exercícios aplicar-se-ão as perguntas do parágrafo I.

(Translation)

I. Key Questions:

1. What kind of knowledge have you used in this task? (Free Recall Task)
2. Can you explain me why you have used this kind of knowledge in this task? (FRT)
3. Can you use another kind of knowledge to solve the same task? (FRT)
4. How would you use this concept to solve this task? (Hinting Task)
5. What is the relationship between this concept and this one? (HT)

II. Explanation:

A range of tasks for Free Recall task and Hinting Task at each phase of the interviewing procedure will be selected from tests to be developed and given to students during the course of the study.

Appendix 4: Elaboration and Concept Mapping Task

Exercícios

1. São dadas as seguintes proposições verdadeiras:

- a. *A soma das medidas dos ângulos internos dum triângulo é igual a 180° .*
- b. *Se duas rectas paralelas são intersectadas por uma recta transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.*
- c. *Dois triângulos são congruentes se têm um lado igual e os dois ângulos adjacentes iguais entre si.*
- d. *Uma diagonal dum paralelogramo divide-o em dois triângulos congruentes.*

1.1 Elabore um exercício onde podes usar todas ou algumas proposições apresentadas em cima.

1.2 Resolve-o indicando que proposições utilizaste.

2. Sejam dados os seguintes conceitos: triângulos, ângulos, paralelismo, linha média, semelhança, bissetriz, razão e proporção. Construa proposições verdadeiras relacionando o conceito “triângulos” com um ou mais conceitos dados.

Obrigado pela cooperação

dr. Luis Weng

(Translation)

I. Elaboration Task

1. Suppose that you have available the following concepts and theorems:
 - a) *The sum of the measures of the three angles of every triangle is 180° .*
 - b) *If two parallel lines are cut by a transversal, then the alternate interior angles are congruent.*
 - c) *If two angles and the side between them in one triangle are congruent to two angles and the side between them in another triangle, then the two triangles are congruent.*
 - d) *A diagonal of a parallelogram divides the parallelogram into two congruent triangles.*
2. Construct a task where you can use some or all concepts and theorems given.
3. Solve this task mentioning the concepts and theorems used.

We can construct for example the following tasks from these concepts or theorems:

- Prove that the opposite sides of a parallelogram are congruent.
- Prove that the opposite angles of a parallelogram are congruent.
- Prove that the diagonal of a parallelogram bisects each other.
- The measures of two adjacent angles of parallelogram ABCD are $x=29^\circ$ and $y=10^\circ$ respectively. Determine the measures of all its internal angles.

II. Concept Mapping

4. Suppose you have available the following concepts: triangles, angles, parallelism, line bisector, similarity, angle bisector, ratio and proportion. Construct true propositions connecting the concept of “triangle” with one or more concepts given.

For example: *The sum of the measures of the three (interior) angles of every triangle is 180° .*

Thanks for your cooperation!

Appendix 5: Analytic Geometry Lecturer's Test

1º TESTE DE GEOMETRIA ANALÍTICA

V.I

1. Considere os vectores $\vec{u} = 8\vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
 - a) Determine o produto escalar dos vectores dados
 - b) Encontre o valor do ângulo formado pelos vectores dados
 - c) Expresse o vector $\vec{w} = (-2; 9)$ na base $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$
2. Sabendo que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formam um ângulo $\beta = \frac{2}{3}\pi$ e que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$; calcule:
 - a) $(\vec{a} + \vec{b})^2$
 - b) $\vec{a} \times \vec{b}$
- 3. Dados os pontos $A(-11, 8, 4)$, $B(-1, -7, -1)$, $C(9, -2, 4)$, provar que os segmentos de rectas AB e BC são perpendiculares entre si.
- 4. Compor as equações paramétricas do plano π que passa pelo ponto $A(7, 7, 1)$ e contém os vectores $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ e $\vec{b} = (1, 1, -2)$
- 5. Dada a equação $8x + 4y - z + 18 = 0$ determine:
 - a) o comprimento da normal
 - b) os ângulos directores da normal

FIM

1º TESTE DE GEOMETRIA ANALÍTICA

VII

1. Dados dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\|\vec{u}\| = 3$ e $\|\vec{v}\| = 5$. Determinar o valor de k de modo que $(\vec{u} + k\vec{v}) \perp (\vec{u} - k\vec{v})$
2. Sabendo que o vector $\vec{c}$ é perpendicular aos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, que $(\vec{a}; \vec{b}) = 30^\circ$; $\|\vec{a}\| = 6$; $\|\vec{b}\| = 3$ e $\|\vec{c}\| = 3$, calcule o produto misto $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
- 3. Determine o ângulo α formado pelos segmentos de rectas AB e CD, sendo $A(-3, 2, 4)$, $B(2, 5, -2)$, $C(1, -2, 2)$, $D(4, 2, 3)$.
- 4. Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(3, 3, -4)$ e $\frac{3}{13}; -\frac{12}{13}; -\frac{4}{13}$ são os co-senos directores da sua normal.
- 5. A distância desde a origem a um plano δ é 5 e a normal tem como parâmetros directores $(-2, 6, 3)$. Determine:
 - a) a equação geral deste plano
 - b) uma equação vectorial do plano

FIM

Appendix 6: Students' Assessment Matrix for Diagnostic Test

Item/Student nº	1	2	3	4	Total Points
1	2	1	2	1	6
2	1	2	2	1	6
3	2	1	1	1	5
4	2	1	2	2	7
5	2	1	2	1	6
6	2	1	2	2	7
7	1	1	2	1	5
8	2	1	2	1	6
9	2	2	3	2	9
10	4	1	1	1	7
11	2	1	2	1	6
12	1	1	3	2	7
13	3	1	2	1	7
14	2	1	2	1	6
15	1	2	2	1	6
16	1	1	1	1	4
17	1	1	2	1	5
18	4	2	3	3	12
19	3	1	2	2	8
20	4	1	2	2	9
21	2	1	2	1	6
22	2	1	1	1	5
23	2	1	2	1	6
24	2	1	2	2	7
25	2	1	2	1	6
26	2	2	2	2	8
27	2	1	1	1	5
28	1	1	4	2	8
29	1	1	2	1	5
30	2	1	1	1	5
31	2	1	2	1	6
32	1	1	2	1	5

Points: 4 - Good connections among algebraic and geometric concepts
 3 - Reasonable connections among algebraic and geometric concepts
 2 - Weak connections among algebraic and geometric concepts
 1 - Blank response or wrong connections among algebraic and geometric concepts

Target Sample: High achievers: 9, 18, 19, 20, 26, and 28 (range: 8 – 16 points)
 Low achievers: 1, 2, 4, 6, 10, 12, 13, and 24 (range: 4 – 7 points)

Appendix 7: A Scheme for Analysing Students' Transcripts

Extract of transcript (Portuguese)	Comments	Issue/Sub issue
S1: (Lê o enunciando). Então eu fiz assim o exercício. Determine o ângulo formado entre os segmentos de recta AB e CD. Eu tenho aqui... parto do princípio que tenho dois segmentos. E os segmentos estão situados no espaço tridimensional, tridimensional. Primeiro tenho que determinar os segmentos. Tenho que determinar os segmentos sim. Eu tenho as extremidades. Tenho o ponto A e o ponto B. O ponto tem como as coordenadas -3, 2, 4. O ponto B 2, 5, -2. Primeiro tenho que descobrir este segmento. A partir dessas coordenadas descobrir o segmento. Como? O segmento AB obtem-se subtraindo o B menos o A. Assim fica, dois menos, menos três fica cinco. Subtraindo dois menos menos fica mais, fica cinco. Cinco menos dois fica três. Menos dois menos quatro fica menos seis. Assim já tenho o segmento. Aqui tenho o segmento CD usando o mesmo raciocínio. Portanto o co-seno do alfa é formado pelos segmentos AB e CD. Isto é um produto... interno. É um produto interno. Eu peguei este valor que acabei de calcular achei o seu produto e... o módulo do segmento AB vezes o módulo do $\cos \alpha = \frac{21}{40,8}$ segmento CD. Assim apareceu Então o alfa é igual a 60°. Fiz este cálculo com a máquina.	S1 explained how he determined the angle between segments AB and CD using the dot product of vectors. He used segment and vector interchangeably. Later I searched for the reason he did it.	- acronyms - algebraic transformations - Formulae - reasoning
R: O que estou a ver aqui usou algumas fórmulas Eu queria saber eh... Aqui temos dois segmentos, né? AB e CD. E queremos determinar o ângulo formado entre eles. O que reparei que estes segmentos não estão aplicados na mesma origem. Estão separados. S1: Sim. R: Agora como calculou o ângulo entre estes dois segmentos? S1: Umh... Estão separados. Está bom. R: A fórmula quando deduziram... estes são vectores? S1: São vectores, sim. R: Deduziram quando os dois vectores estavam... S1: Na mesma origem, sim. R: Agora, não sei. Ou estes segmentos estão na mesma origem? S1: (Silencio.) R: Não sei se está a entender? S1: Eu percebi, percebi, percebi. (Silencio). R: Aqui temos o ponto A, o ponto B está aqui... S1: Dá para ver que não estão no mesmo ponto. (Silencio). Eu só peguei a fórmula. Quando me preparei só vi esta fórmula que era para calcular o ângulo a partir da fórmula. Ya, (rindo-se).	S1 blindly determined the angle between the two segments. After hinting he was aware that the segments did not intersect that is why they did not form an angle. Accordingly, he said his solution was wrong.	- Visualization - h1: the angle between non-intersecting segments? - r1: the angle between two meeting segments? - r2: formula deduction with meeting or non-intersecting segments?

R: Sabe como apareceu esta fórmula? S1: Sim, demonstrámos. R: Como aparece esta fórmula? Pelo menos explique a disposição dos vectores quando deduziram esta fórmula. S1: A disposição dos vectores? (Silencio). Os dois vectores estavam na mesma origem, ya. Quando estava a resolver o teste não me apercebi que os dois segmentos não estavam na mesma origem. Na altura não me apercebi disso. Não me apercebi disso. R: Então qual é a sua opinião em relação a sua resolução? S1: Não pode estar certo. R: Não entendi? S1: Não pode estar certo (rindo-se).		
R: Porque é que diz não está certo? S1: (Silencio). R: Bem, vamos ver. Nós temos este segmento, não é? S1: Sim. R: E temos o outro segmento e vamos supor que é este aqui. S1: Sim. R: Entre estes dois segmentos existe um ângulo entre eles ou não? S1: Se efectuarmos o prolongamento dos segmentos podemos apanhar intersecção. R: Pode fazer o prolongamento? S1: (Silencio) R: Como pode achar o ângulo entre estes dois segmentos? S1: (Silencio). R: Existe um ângulo entre eles ou não? S1: Bom, assim como estão não existe. Mas fazendo o prolongamento posso apanhar. R: Pode fazer o prolongamento. S1: (Fazendo o prolongamento). R: Então, acha que este é o ângulo entre este segmento e este? S1: Sim. R: Porquê? S1: (Silencio). Porque há uma intersecção entre os dois segmentos. Fazendo essa intersecção obtemos este ponto e posso considerar esta parte como o ângulo entre eles.	S1 was confused about the angle between two segments in space (3D) in the case when they do not intersect each other. He suggested the extension of one of the segments to allow intersection in order to visualize the angle between them. In the 3D extension may not be enough to allow intersection. S1 reasoned as the segments were on the plane (2D). However even if the extension not allow the intersection between the two segments, we can transfer the 3D picture to 2D and visualize the angle between the two segments as it they intersected each other according to this convention: We will define the angle between any two directed skew lines to be the angle between any two intersecting lines which are respectively parallel to the skew lines and similarly directed (Lehman, 1942, p. 281).	- Visualization - h2: to sketch the two segments given - h3: visualize the angle between them.

R: É possível transladar este segmento e fazer coincidir o ponto B e o ponto A? Quer dizer, é possível fazer-se a translação? S1: (Silêncio). R: Aqui fez o prolongamento. Mas é possível fazer-se uma translação paralela deste segmento até aplicá-lo no mesmo ponto? S1: (Silêncio). R: Aprendeu a translação, não é? S1: Sim, dei. R: Transladando um objecto A muda ou mantém as suas propriedades? S1: Mantém as propriedades. Não muda. R: Será que o ângulo será o mesmo que o ângulo que obtive no prolongamento? S1: Se eu levar este segmento mantendo as suas propriedades, o seu comprimento, eu acho... R: Pode fazer essa translação para ver como fica? S1: (Fazendo a translação em silencio). R: Está fazer uma... S1: Estou a fazer um segmento. R: Que transformação é essa? S1: Geometria. R: É geometria. Mas aqui trata-se da translação. Translada este segmento e aplica-o no mesmo ponto. É possível fazer-se isso ou não? S1: É possível. R: Então como é que se faz isso? S1: (Silêncio). R: Traça-se uma recta paralela... S1: Ah, uma recta paralela. R: Acho que deram isso na geometria euclidiana. S1: Claro. R: E depois? S1: Depois traço um segmento com um compasso com a medida deste segmento. R: Pode fazer isso? S1: (Construindo). É possível. R: Agora, vai obter um ângulo aqui. Será que é igual a este ângulo (obtido pelo prolongamento)? S1: Não, não é (rindo-se). R: Não é? S1: Não. Mas... é... é possível. R: Como se chamam esses ângulos? S1: São ângulos alternos internos. São ângulos que se obtém tendo duas rectas paralelas cortadas por uma terceira. Então os ângulos que apanhamos aqui são iguais. São os ângulos... (Silêncio).	I asked him whether it is possible to make a parallel translation of segment CD and intersect point C and point B. He kept silent. I asked him whether he learnt translation and whether the properties of the object would change after this transformation. He asserted the properties of the object are preserved. He made a translation of segment CD and made coincide points C and B. He explained how he made such translation and used parallel lines and he said he would use a compass in order to preserve the length of the segment. I asked him whether the angles obtained through extension (a translation in the same direction of the segment) and translation were equal. He hesitantly said there were equal as alternate interior angle. Actually if consider them as coplanar segments the angles would be equal as corresponding angles.	- Construction - h4: extension or translation of segments? - h5: properties of the image of an object transformed by translation? - h6: translation and extension of segments yield the same angle? - h7: transform the object through translation. - r3: how to use translation? - r4: what kind of angles constructed?
---	---	--

R: Agora isto, digamos, é um pensamento geométrico o que explicou aqui. Agora quando utiliza esta fórmula, esta fórmula é entre dois vectores que estão aplicados na mesma origem. S1: Sim. R: Agora a questão é: Será que esta fórmula satisfaz as condições daquilo que fez? S1: Acho que sim. Satisfaz. Nós podemos transferir este segmento, e ter um outro que tem a mesma origem usando paralelismo, rectas paralelas, com um compasso transferi este segmento para aqui. E vai me dar a ideia de que este ângulo... estes dois ângulos são iguais. Estou perante duas rectas cortadas, estes dois ângulos são iguais. Há um teorema que diz isso. Se eu posso realmente transferir para aqui, então fico na posição de eu usar esta propriedade. (Inaudível).	S1 explained why the formula works using his sketch and geometrical explanation (construction, parallelism, invariance of length, congruent angles, theorem, etc.)	- Formulae -reasoning - Visualization - h10: formula also for non-intersecting segment?
--	---	--

R: Agora a minha pergunta, o sr usou vectores e aqui fala-se de segmentos. S1: Segmentos. R: Existe alguma relação entre vectores e segmentos? Por ex. aqui temos o segmento AB e o sr achou o vector AB. Então qual é relação entre vectores e segmentos? S1: Sim. (Silencio). R: Não sei se... S1: Estou a perceber, estou a perceber. A partir dos segmentos fui obter os vectores e depois trabalhar com vectores. Eu acho que há relação. Porque a partir dum... dum... dum segmento... pode-se achar o seu vector formado através das suas extremidades. Assim peguei as coordenadas do segmento. E trabalhei com as coordenadas do segmento. R: Para ti o vector e o segmento têm a mesma natureza? S1: Não, bom... a partir do segmento posso obter o vector do segmento. R: Então qual é a relação que existe o vector e o respectivo segmento? S1: (Silencio). R: É o mesmo conceito? S1: Entre o segmento e o vector? R: E o vector. S1: (Silencio). Bom, o que eu sei é que a partir dum segmento com as coordenadas do segmento posso obter o vector desse segmento. Mas explicar quanto a essência da ligação entre os dois conceitos estou completamente em branco. R: Quais são as propriedades dum segmento e quais são as propriedades dum vector? S1: (Silencio). R: O segmento tem um sentido? S1: O segmento não tem um sentido. Mas o vector já tem. Ah, está bom, porque de facto para poder achar este segmento tive que dar um sentido ao meu vector. Dei o sentido, dei o sentido ao vector, então pego nas extremidades, nas extremidades subtraio e vou obter o sentido do vector. A partir desse momento já tenho... o segmento não tem nenhum sentido. Mas a partir do momento que, a partir do momento que eu analiso o segmento e tiro o vector, tendo o vector já tenho o sentido, tenho o sentido. R: E qual é a relação entre o comprimento do vector e o segmento? S1: Não percebi. Desculpa. R: Um vector tem um sentido, mas também tem um comprimento. Qual é a relação entre o segmento e o comprimento do vector? S1: (Silencio). R: O comprimento é uma medida, né? S1: Sim. O comprimento é uma medida de facto. R: E o comprimento dum vector? S1: (Silencio). R: É uma medida ou não? S1: Do vector? Do vector em coordenadas.	S1 faced difficulties in comparing vector and segment. He stated that what he knew was to determine a vector from a segment using the initial and the terminal points. After hinting process, he realized that the length of a vector was the same as the length of the corresponding segment.	-Formulae - reasoning - segment - vector - r5: formula for segments and vectores? - r6: relation vector and segment? - r7: properties of vector and segment? - h11: segment direction? - h12: relation segment length and vector length? - h13: norm of vector? - h14: length and norm of vector? - h15: norm in the formula? - h16: numeric values in the formula? - h17: numeric values represent norm of vector in the formula.
--	---	---

R: E qual é o comprimento deste vector? S1: (Silencio). R: Ouviu falar da norma? S1: Sim, já ouvi. R: O que é a norma dum vector? S1: A norma dum vector é a medida do vector. R: É a medida do vector. E a medida dum vector é o que é? S1: É a norma do vector. R: Está a pensar... S1: Estou a tentar usar a fórmula. R: De norma? S1: Sim. R: Aqui utilizou-se a norma (referindo-se a formula usada pelo estudante para determinar o ângulo)? S1: É exactamente isto aqui a norma. Quando ponho por ex a norma. O produto... R: Onde está a norma aqui nesta fórmula? S1: É a parte debaixo. (Veja a fórmula usada pelo estudante). R: Qual? S1: O vector AB, o módulo do vector AB. R: O módulo do vector AB é que é a sua norma? S1: Não. O módulo do vector AB é a norma... (Silencio). R: Por ex estes valores aqui $\sqrt{64}$ e $\sqrt{26}$ o que representam? S1: (Silencio). R: Temos a norma do vector AB vezes a norma do vector CD. Então, disse que a norma era o módulo do vector ou o comprimento. Então $\sqrt{64}$ tem a ver... S1: Só pode ser a medida... Ah, está bom. A norma... aliás a $\sqrt{64}$ é o valor da norma do vector AB. R: E qual é o comprimento do segmento AB? S1: (Silencio). R: É exactamente a norma do vector AB, não é? S1: (Rindo-se). A norma do vector AB.		
---	--	--

R: É a mesma coisa. A minha outra pergunta é: Como é que esta fórmula ou por outra temos as coordenadas deste vector. Quando o transladamos para aqui será que as suas coordenadas continuam ser as mesmas e porque? Ou são diferentes? S1: Partindo de princípio que são pontos no... eh... no sentido (espaço) tridimensional, quando nós transladamos o segmento de C para este ponto é visto que muda as suas coordenadas. (Talvez as coordenadas a que o E1 se refere têm a ver com as coordenadas das extremidades do segmento). R: Muda as suas coordenadas? S1: Sim. R: Então os vectores são diferentes porque as coordenadas são diferentes ou... S1: Não, até podem não ser. Não podem ser diferentes. R: Os vectores são diferentes ou não quando fazemos a translação? S1: (Silencio). Não, não são. R: E as suas coordenadas vão mudar ou são as mesmas? S1: Vão mudar. As coordenadas vão mudar. R: Mudando as coordenadas, tendo coordenadas diferentes será que vão representar o mesmo vector? S1: (Silencio). Acho que não. R: Vamos lá ver se fizemos a translação por ex temos um vector. Este é um exemplo. S1: Certo. R: Consideremos um ex simples partindo da origem. Por ex temos este vector OA. Que tem como coordenadas 2 e 1. Vamos transladar para qualquer posição. Vamos supor que este ponto... S1: O ponto zero, zero passa para... R: O ponto zero, zero passa para um, um. E este para... vamos sempre conservar o... S1: O comprimento. R: O comprimento, ya. Então teríamos, temos que ter aqui duas unidades. E aqui uma unidade para cima. Quais seriam as coordenadas deste ponto? S1: Três neste caso. R: E aqui seria? S1: Aqui seria o dois, o dois. R: A minha pergunta é: Nós fizemos uma translação paralela deste vector, né? Seja o vector por ex BC. Será que as coordenadas do vector BC e do vector OA são iguais? S1: Não são, não são. R: Pode escrever as coordenadas do vector OA? S1: Aqui temos o ponto $O(0;0)$ e o ponto $A(2;1)$. R: Então quais são as coordenadas do vector OA? S1: O vector OA vai ter dois e... e um (calculando $2-0$ e $1-0$). R: Agora o vector BC? S1: Então o vector BC nós teremos o ponto $B(1;1)$ e o ponto $C(3;2)$. Então as coordenadas do	Before hinting he knew that the translation preserved the properties of the object but he did not linked this idea with vector coordinates invariance. S1 stated the coordinates of a vector would change after translation. But after some hinting he realized that the initial and the terminal points of the vector would change but the vector coordinates would be preserved. Hence, he correctly explained why the formula also worked for non-intersecting segments.	-algebraic transformations - formula - geometric transformations -translation - vector coordinates - invariance - h18: translation preserves vector coordinates? - h19: different coordinates implies different vectors - h20: translation generates different vectors? - h21: different coordinates representing the same vector? - h22: make translation of vector OA - h23: This point has its image on that point - h24: What is the image of this point? - h25: are the image vector BC and the vector OA coordinates the same? - h26: write down the coordinates of vector OA - h27: write down the coordinates of vector BC - h28: what is your conclusion?
---	--	--

vector BC são 2 e 1. (Rindo-se). R: O que constatou? A translação... S1: A translação não afecta o... as coordenadas do vector. R: Qual é a conclusão que tira? S1: Eu estou a ver que mesmo mexendo as coordenadas... eu posso mudar as coordenadas dos pontos do segmento. Isso não afecta as coordenadas deste segmento. Podem mudar as coordenadas dos pontos mas não mudam as coordenadas do segmento. Por ex nós temos aqui o ponto zero, zero e o ponto 2 e 1. Aqui temos o ponto 3 e 2. Eu mudei as coordenadas dos pontos mas as coordenadas do... do vector continuam as mesmas. Não mudam. Ao mudar... ao transladar este segmento posso mudar as coordenadas dos pontos. Mas não mudo as coordenadas do vector. Então isso permite-me usar a fórmula. Porque mudei as coordenadas dos pontos deste segmento, mas não vou mudar as coordenadas do vector. Então permite-me usar esta fórmula para determinar o ângulo formado pelos dois segmentos.		
--	--	--

Appendix 8: Certification-True Translation

DOMINGOS CASTIGO JOAQUIM CHONGOZE
Official Translator Sworn in by the Judicial Court of
Maputo - Mozambique
Contact: Ahmed Sekou Touré, 1263, Cell: 823227980.

CERTIFICATION-TRUE TRANSLATION

To whom it may concern, I hereby certify, on request of the person/entity concerned, that the translation made from Portuguese to English of the document herein attached-

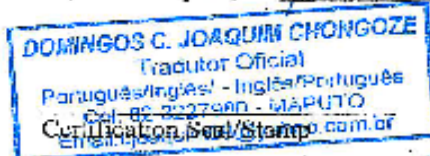
THESIS BY LUIS WENGE SAN "A-ISO"
PILLOP ILGAD

containing — page(s) is to the best of my knowledge and belief a true and correct translation of the original document.

I further state that I take no responsibility for the contents and form on which the original document is produced. My responsibility is only held for the translation.

Being true, in faith and testimony I issue the present certificate upon which I set my hand and seal/stamp.

Issued in Maputo, on 10/12/2009



Domingos C. Joaquim Chongoze
Translator's Signature

I have been authorized to act as an official Sworn Translator since 06th December, 2000 by the Municipal Council of Maputo City, under the License number 021/2000, and since 22nd February, 2001 by the Judicial Court of Maputo City, under the Oath Terms, folio 15, Book no.6. I also have my signature registered at the third Notary Public of Maputo City, under Book no. 1, folio 76, dated 28th February 2006; and at the fourth Notary Public of Maputo City, under Book no. 02/003, folio 21, dated 17th January 2006.

Appendix 9: Extracts of Portuguese transcripts to interviewing phase 1

Task 1

Student 1:

S1 (Student 1): Temos por exemplo aqui um triângulo... eh... esses dois lados devem ser iguais, né? (Imperceptível). Então o quadrado... este lado (imperceptível). Eh... é uma forma muito vaga esta. (S1I:21-23: Student 1, Interviewing Phase 1, and lines 21 to 23)

R (Researcher): Sim, aquilo que souber, pois... (RI:24: Researcher, Interviewing Phase 1, and line 24)

S1: (Silencio) este é... um cateto, este também é [um] cateto, este é a hipotenusa parece. O quadrado dos catetos (algo imperceptível). Teorema de Pitágoras... Então eu pus mesmo “Esqueci-me”, porque de facto agora não tenho assim... Eu sei... eu sei mais ou menos donde vem o Teorema de Pitágoras. Então eu tinha que mais ou menos voltar a ler para me recordar. Porque eu passei por este teorema. Estudei este teorema. Mas esqueci-me. Esqueci-me mesmo. Esqueci-me, esqueci-me. Estou há muito tempo sem me lidar com estes conceitos. Eu aprendi os conceitos, mas estou há muito tempo sem me lidar com estes conceitos. (S1I:25-32)

R: Mas o enunciado pelo menos do Teorema de Pitágoras. Não a demonstração do teorema pois exige mais, pelo menos o enunciado. O que diz esse teorema, tem alguma ideia ou tem uma formula. (RI:33-35)

S1: Esqueci-me, esqueci-me. (S1I:36)

S1: Esqueci-me completamente. (S1I:38)

R: Mas... sim, sim, acho que eu ouvi um conceito que é interessante. (Silencio longo). ... Falou da palavra “quadrado” aí, né? Então onde é que entra “quadrado” nessa formula do Teorema de Pitágoras? (RI:39-41)

.....
S1: ... A hipotenusa é igual ao... ao cateto ao quadrado. (Inaudível). (S1I:44, 45)

.....
R: Mas talvez, (se tem) um quadrado tem haver talvez com a área desse quadrado. (RI:62)

S1: Tem haver com a área sim. Ya, tem. (S1I:63)

R: Então, qual é a relação dessas áreas? (RI:64)

S1: Ah, bom, é isso aí. A área (silencio longo). (S1I:65)

R: A área... (RI:66)

S1: A área de... de... desta parte onde por exemplo o... porque isto é um quadrado, não é um rectângulo. É um quadrado. (Algo imperceptível). (S1I:67, 68)

R: A área de um quadrado. (RI:69)

S1: Esta parte da hipotenusa, sendo o lado dum quadrado, sua área é igual ao dobro da área de um dos catetos. (S1I:70-71)

.....
R: Então, numa formula como é que ficaria? (RI:72)

S1: Ficaria mais ou menos assim. A área... deste quadrado que é... (S1I:73)

R: Qual quadrado? (RI:74)

S1: Este quadrado que é a hipotenusa é igual a área do quadrado do cateto ao quadrado. Eu digo ao quadrado porque são duas vezes a área desta parte onde o cateto vai ser o lado dum certo quadrado. (S1I:75-77)

R: Está... está a dizer que é o dobro... da área... (RI:78)

S1: (Assente com a cabeça). O dobro. (S1I:79)

R: Então porque tem haver com o expoente? (RI:80)

S1: É o dobro,yah... Não é o expoente... é o dobro. Então, ficava assim: o dobro da área do quadrado, que neste caso consideramos como se fosse um cateto. A área do quadrado cujo lado é o cateto. (S1I:81-83)

.....
R: Agora, se os catetos forem diferentes o que acontece com o Teorema de Pitagoras? Mas sendo este angulo... Que tipo de angulo é este? (RI:84, 85)

S1: É um rectangulo. (S1I:86)

R: É um rectangulo... Agora vamos supor que os catetos são diferentes. Será que o teorema funciona também para os catetos diferentes? (RI:87, 88)

S1: (Longo silencio e palavras impercetíveis). Bom, eu acho que funciona. Porque nós estamos a ver aqui a área, estamos a ver a área. Então, ah, tá bem, não funciona, não funciona. (S1I:89-91)

R: Porque não funciona? (RI:92)

S1: Não funciona porque se eu tenho aqui por exemplo 3 cm, aqui tenho 5 cm, eu não posso pôr duas vezes a área deste... deste quadrado, a dizer que a área de todo o quadrado que está na hipotenusa vai ser igual ao dobro da [área] de um dos catetos. Porque este cateto por exemplo é maior que este, então a área daqui vai ser maior que esta. Por isso posso, posso pôr duas vezes a área deste... eu não posso pôr duas vezes a área deste cateto. (S1I:93-98)

R: Porque? (RI:99)

S1: Porque a a área deste cateto, a área deste quadrado com este cateto de 3 cm é diferente da área deste quadrado cujo cateto são 5 cm. Então... (Silencio longo) (S1I:100, 101)

R: Então... (RI:102)

S1: Eu devia voltar a ver assim de raspão o Teorema de Pitagoras, talvez assim poderia me recordar. E agora estou a fazer as coisas ao (acaso) para poder... (rindo-se)? (S1I:103, 104)

R: Não... sim o que quero mesmo é ver como é que... o seu conhecimento que está adormecido pode... (RI:105, 106)

S1: Despertar. (S1I:107)

R: Despertar, esse é que é o objectivo. (RI:108)

S1: Ah, ok. (S1I:109)

R: Yah, mas... (RI:110)

S1: Eu estava a dizer que esta formula só pode funcionar se estes lados forem lados iguais num triangulo rectangulo. Se estes lados forem iguais eu acho que posso pôr desta maneira. (Silencio). (S1I:111-113)

R: Continue. (RI:114)

S1: Então se os lados forem iguais, acho que posso pôr a área do quadrado que é formada por um dos lados... por, por hipotenusa pode ser igual a duas vezes a área de um (destes) quadrados onde o lado é um cateto, se forem iguais. Mas agora, o dr acaba de me dar uma outra hipotese (algo imperceptível), imaginemos que os lados são diferentes. Se os lados forem diferentes, logo esta pequena ideia que eu tenho já não funciona, porque a área, área desta... aqui por exemplo são 3 cm, vai ser 9 por exemplo cm^2 , enquanto aqui vai ser 25 cm^2 . (S1I:115-121)

R: Continue. (RI:122)

S1: Então nesta ordem de ideias, a teoria que diz duas vezes a área de um dos quadrados formado por um dos catetos já não funciona, não funciona. (S1I:123-124)

.....
R: Agora, outra ideia, talvez... ah... (algo imperceptível). É a única relação que existe do Teorema de Pitágoras ou existe uma outra? Em que diz que... a área deste quadrado... (RI:125, 126)

S1: Poderia pôr por exemplo a área deste quadrado que... (cujo lado) é a hipotenusa, né, é igual a soma que é a área do primeiro cateto mais a área do segundo cateto. Partindo de princípio que são diferentes. Partindo de princípio que são diferentes. (S1I:127-129)

R: Isto aqui é em relação ao Teorema de Pitágoras... eh... ou... de que a área do quadrado... (RI:130, 131)

S1: Ah, de que a área é igual a soma, yah, acho que é isso. (S1I:132)

R: Agora, qual é a fórmula da área aqui de... de... do quadrado cujo lado é a hipotenusa? Pode escrever? (RI:133, 134)

S1: A fórmula? (S1I:135)

R: A fórmula, yah. (RI:136)

S1: É aquela fórmula de área eh... ao quadrado é igual, bom, neste caso como pus hipotenusa, é a hipotenusa ao quadrado. (S1I:137, 138)

R: E a área deste... (RI:139)

R: Mas aqui é como os catetos são diferentes, então (algo imperceptível) talvez aqui dar uma outra notação. (RI:142, 143)

S1: Também, a área igual a área eh... ao quadrado (que pus os catetos também) ao quadrado mais (silêncio). (S1I:140, 141)

R: Mas aqui é como os catetos são diferentes, então (algo imperceptível) talvez aqui dar uma outra notação. (RI:142, 143)

.....
S1: Bom, eu... (silêncio). Talvez pegar uma régua. (S1I:144)

R: Uma régua. Quer uma régua? (RI:145)

S1: Para ser mais visível. Eu quero... quero sair daqui (algo imperceptível). Quero ver se o que estou a pensar de facto... (Rindo-se). Ok, só desta maneira é que posso sentir-me mais a vontade. (S1I:146- 148)

.....
R: E qual é a razão porque escolheu 5 para um cateto e 3 para o outro cateto? (RI:159)

S1: Diferenciar os catetos. Para ver se esse quadrado dá mesmo a soma das duas áreas. (S1I:160)

R: Poderiam ser outros números ou não? (RI:161)

S1: Sim, poderiam. Eu escolhi assim de forma arbitrária. (Algo imperceptível). (S1I:162)

R: Com várias tentativas, talvez vai-se recordar, né? (RI:163)

S1: (Riu-se). (Silêncio). Então, eu tenho aqui por exemplo o lado, são 3 cm aqui são 5 cm, e aqui são 6 cm, tudo numa forma estimada de qualquer maneira. Então temos aqui, neste caso esta área (silêncio) é igual a 36 cm^2 , aqui tenho 9 cm^2 , aqui tenho 25 cm^2 . Então, para tentar sustentar aquela ideia de duplicarmos, eu diria esta área, esta área, esta área um é igual, é igual a área dois mais a área três. Então significa que 36 cm^2 tem que ter de facto 9 cm^2 mais 25 cm^2 . Só que isto foi feito... isto dá 4, dá 34 cm^2 . Mas acho que se eu tivesse feito com uma precisão aqui tinha que igualar. Então, a ideia que eu estou a ter do Teorema de Pitágoras... (S1I:164-171)

Student 2:

S2: Talvez, (dizer que estas questões) foram dadas há bastante tempo, isto às vezes torna-nos um bocado difícil recordar o que já aprendemos devido a falta de prática. (S2I:7, 8)

R: Pois, pois... (RI:9)

S2: A prática é muito importante para o nosso trabalho quotidiano. (S2I:10)

.....
S2: Que... a falta de aplicação, podemos dizer que... o facto de não aplicarmos os conhecimentos faz com que percamos uma parte daquilo que nós aprendemos. Isto porque, após a minha formação quando fui trabalhar, fui calhar sempre dei 6a e 7a (classes). (S2I:30-33)

.....
S2: (...). O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos catetos, dos dois catetos. (...) (S2I:52, 53)

.....
S2: (...). Mas o meu objectivo era para demonstrar que... “c” ao quadrado igual... que a hipotenusa era para dizer a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos catetos ao quadrado, que é “a” ao quadrado mais “b” ao quadrado. (...). (S2I:55-57)

Student 3:

S3: Só dávamos as fórmulas. Daí usávamos para calcular as medidas dos lados. (S3I:57)

.....
R: Bem, vamos lá ver talvez... alguma vez viu esta figura? Triângulo rectângulo, né? (RI:74)

S3: Sim. (S3I:75)

R: Depois constroi-se rectângulos, aliás, desculpe quadrados eh, aqui... cujas medidas tem a ver com os lados do triângulo. Já viu alguma vez esta figura? (RI:76, 77)

S3: Já, já. (S3I:78)

R: Como utilizaram isto para demonstrar o Teorema? Porque isto é uma das formas utilizadas para a demonstração do Teorema. (RI:79, 80)

S3: Sim, sim. (S3I:81)

R: Não sei se tá ver mais ou menos como é que utilizaram esta forma para demonstrar? (RI:82)

S3: Porque para calcularmos a área do triângulo talvez acho que usaram a fórmula do cálculo da área do quadrado, que é lado ao quadrado. (S3I:83, 84)

R: Continue. (RI:85)

S3: Então, sendo lado ao quadrado... (silencio). Epa, não sei. (S3I:86)

.....
R: Recorda-se desta fórmula não é (A área do quadrado maior é igual a soma das áreas dos dois quadrados menores que circundam o triângulo rectângulo)? (RI:87, 88)

S3: Sim, sim. (S3I:89)

R: Como utilizaram esta fórmula para demonstrar o Teorema? (RI:90)

S3: (Silencio). (S3I:91)

R: Aqui utilizaram triângulos congruentes? Recorda-se se formaram triângulos congruentes? (RI:92-93)

S3: Triângulos congruentes? (S3I:96)

R: Recorda-se destes triângulos traçados assim? (O investigador traça alguns triângulos na figura anteriormente esboçada). (RI:97-98)

S3: Não, não. (S3I:99)

R: Não utilizaram este método? (RI:100)

S3: Não, não. Esta fórmula aqui, não chegaram a mostrar como aparece. (S3I:101)

R: Então como utilizaram esta figura? Era para quê? (RI:102)

.....
S3: (Silêncio). (S3I:103)

R: Quer dizer se o sr viu esta figura é porque utilizaram para explicar alguma coisa. (RI:104)

S3: Sim. (S3I:105)

R: Então não sabe para que utilizaram essa figura? (RI:111)

S3: Não, não. (S3I:110)

R: E por isso eu queria mostrar-lhe se utilizaram eh, triângulos congruentes nesta figura para depois usarem as áreas e depois comparar e mostrar que a soma dessas áreas, das áreas dos quadrados pequenos será igual a área do quadrado maior. Não sei se está a conseguir ver. (RI:106-109)

S3: Não. (S3I:112)

.....
R: Mas também esta figura aqui. Temos um quadrado, né? Depois vamos ter, eh um outro quadrado aqui dentro e aqui temos triângulos rectângulos, são quatro... recorda-se dessa figura também? E usaram para demonstrar? (RI:113-115)

S3: Sim, sim. (Silêncio). Esta figura... (Silêncio). Esta figura... (S3I:116)

R: Sim. (RI:117)

S3: Eu recordo-me que vi esta figura acho num exame, num exame. Que era para demonstrar que... era para demonstrar que as fórmulas do... como calcular um triângulo. Era para demonstrar eh... como é que sai a área do quadrado através daquela fórmula... tem uma fórmula que... a fórmula dos co-senos. (S3I:118-121)

R: Apareceu num exame isto? (RI:122)

S3: Sim, num exame, num exame de admissão. (S3I:123)

R: Não utilizaram esta figura para demonstrar o Teorema de Pitágoras? (RI:124)

S3: Não, não. (S3I:125)

.....
R: Ou não usaram um outro método que é de... aquilo que se chama de... triângulos semelhantes... Então temos três triângulos rectângulos que são semelhantes depois usa-se a semelhança de triângulos para demonstrar o Teorema de Pitágoras (TdP). Conhece esta demonstração? Já deram nas classes anteriores? (RI:126-129)

S3: Não. (S3I:130)

R: Então o que fizeram lá na Escola Secundária? (RI:131)

S3: Nas Escolas Secundárias o que faziam era dar fórmulas. Não chegaram a demonstrar. Para este caso não me lembro ter demonstrado. (S3I:132, 133)

R: O TdP? (RI:134)

S3: Sim. Só diziam o TdP diz isto. E davam a fórmula que esta aqui. E assim, não chegaram a dar uma demonstração concreta. (S3I:135, 136)

.....

Student 4:

S4: Conforme a minha apresentação, eh segundo este esboço que eu fiz, eh aqui pretendo explicá-lo melhor. Sobre o meu ponto de vista este Teorema tem algo a ver com quadrados. Então nesse caso estas áreas são iguais ($A_1 = A_2 + A_3$). Eu considere este lado l sendo o maior de todos. Este é um quadrado, este é um quadrado. Então é válido $l^2 = m^2 + n^2$ onde $A_1 = l^2$, $A_2 = n^2$ e $A_3 = m^2$. Daqui vem o Teorema de Pitágoras que é a soma... o maior... a hipotenusa é a soma do quadrado... o quadrado da hipotenusa é a soma dos... dos quadrados dos catetos. Daí cheguei a esta conclusão. Então eu disse que a hipotenusa... o quadrado da hipotenusa é directamente proporcional ao quadrado... a soma dos quadrados dos catetos. (S4I:7-15)

.....
R: Como descobriu que a área do quadrado maior é a soma das áreas dos quadrados menores? (RI:22)

.....
S4: Bem, bem eu... eu parti dum princípio que o perímetro do triângulo é a soma de todos os lados ($P = l + m + n$). (S4I:26, 27)

R: Agora o que tem a ver o perímetro com a demonstração? (RI:28)

S4: Já está me ser difícil. (S4I:33)

.....
S4: Directamente proporcional, eu digo, que é igual. Eu digo nesse sentido. (S4I:73)

.....
S4: Talvez, talvez... talvez falando de inverso. Talvez quando se trata de inversamente proporcional está se falar de divisão. Eh, eh directamente proporcional seria igual, né? (S4I:73)

.....
S4: Neste momento não vejo. Por ex. não sei se estarei... eh, a segunda lei de newton se a memória não me trai diz que a força é directamente proporcional à massa... ya é directamente proporcional ao produto da massa pela sua aceleração. (S4I:83-85)

.....
S4: Talvez em termos de relação, não sei. Só que eu usei nesse sentido, directamente proporcional no sentido de querer ter uma equivalência de igualdade. É neste sentido que eu emprego directamente proporcional. (S4I:95-97)

.....
S4: Bem, sobre o mesmo exercício, eh... eh, talvez dizer que não... não foi assim tão fácil provar porque o hábito de provar ainda não está... ainda... ainda não está activado, ainda não existia em mim essa capacidade de provar, normalmente dá-se isto e aquilo e pede-se para calcular. E o porquê ainda não existia na altura. Podem ainda aparecer justificações infundadas mas são o meu parecer. (S4I:112-116)

Student 5:

S5: Num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Então eu esbocei um triângulo com essas medidas. Atribui três unidades a este cateto e quatro unidades a outro cateto. Considerei a hipotenusa, o lado maior, que é cinco. Então o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Então demonstrei. Demonstrei. (S5I:5-9)

R: Onde aprendeu esse tipo de demonstração? (RI:83)

S5: Eu estava a dar... estava a dar (aulas) na escola secundária. (**Aprende-se ensinando.**) (S5I:84)

R: Como professor? (RI:85)

S5: Ya. (S5I:86)

R: Mas essa demonstração aprendeu donde? Investigou num livro ou... (RI:87)

S5: Há um livro que traz (essa demonstração), pode não vir da maneira como eu fiz aqui. Mas há um livro que fala (dessa demonstração). (S5I:88, 89)

.....
S5: Por ex. usando aquelas medidas que eu tenho aqui. Posso considerar que este lado mede 4. (Desenha em silêncio a fig acima). Suponhamos que esses quadradinhos são iguais. Então, os quadrados construídos sobre os catetos, a soma dos quadrados construídos sobre os catetos é igual aos quadrados construídos sobre a hipotenusa. (S5I:95-98)

.....
Student 6:

S6: O Teorema de Pitágoras diz: A soma do quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos. E a fórmula é esta $BC^2 = AB^2 + AC^2$. (S6I:11,12)

.....
S6: Tem que ser ao quadrado. (S6I:16)

R: Sim, sim. Aqui vem a palavra “quadrado”, aqui no enunciado. Como aparece aqui na fórmula? (RI:14)

.....
Student 7:

S7: Agora para demonstração eu parti da fórmula fundamental de trigonometria, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Então a partir daqui eu tive a necessidade de... calcular o... seno do ângulo α e o co-seno do ângulo α a partir deste triângulo. Então $\sin \alpha = \frac{c}{b}$ e

$\cos \alpha = \frac{a}{b}$. Então venho substituir aqui esses dados. Onde tenho seno de α ponho $\frac{c}{b}$. E

como o seno está ao quadrado ponho $\left(\frac{c}{b}\right)^2$ mais o valor do co-seno de α . Como vem

ao quadrado então fica $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. Então desenvolvi isto e obtive $\frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} = 1$. Como tenho

o mesmo denominador, então preferi unir e obtenho $\frac{c^2 + a^2}{b^2} = 1$. Eu fiz aqui o m.m.c.

podia também fazer o produto dos meios vezes o produto dos extremos. É a mesma coisa. Então obtenho $c^2 + a^2 = b^2$. Então tenho b^2 que é a hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos catetos também ao quadrado. (S7I:18-29)

.....
S7: Divido ambos os membros (de $c^2 + a^2 = b^2$) por b . Desculpa por b^2 . Então tenho aqui 1 porque tenho b^2 sobre b^2 . Tenho ainda $\frac{a^2}{b^2}$ e $\frac{c^2}{b^2}$. (Apresenta a seguinte

transformação $1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2$). Onde está $\frac{a}{b}$ substituo por $\cos \alpha$ e $\frac{c}{b}$ por $\sin \alpha$.

Como aqui estão (as expressões) ao quadrado, eu ponho também seno e co-seno ao quadrado. Então temos $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Esta é a fórmula fundamental de trigonometria. (S7I:50-55)

.....

Student 8:

S8: Agora para a demonstração eu usei este critério aqui. Um quadrado que é maior e o outro que está inscrito, também é um quadrado. (Silencio). Que é um quadrado, e também temos triângulos retângulos que são iguais. Então qual foi o princípio que eu usei? Se tivermos esta área do quadrado (maior) e subtrairmos com a área desta parte (quadrado menor) vamos obter a parte restante. Esta parte restante é composta por três... por quatro triângulos retângulos. Com base nisso nós vamos ter a área do quadrado maior menos a área do quadrado menor é igual a uma, duas, três, quatro vezes a área do triângulo. (S8I:13-21)

.....

R: Fundamentaram porque este quadrilátero que está dentro é um quadrado? (RI:37)

.....

S8: Essas distâncias que temos aqui ($HG=GF=FE=EH$) são iguais. (S8I:45)

.....

R: Como mostrar que estes ângulos são de 90° ? Para ser um quadrado os ângulos devem ser de 90° . Os lados são iguais. Só falta saber se é um losango ou um quadrado. Um losango tem... (RI:55)

.....

S8: Lados iguais (silêncio). Logo está errado. (S8I:60)

Task 2

Student 1

S1: Divida a figura em quatro partes congruentes... Então, eu parti do princípio que partes congruentes, quer dizer quatro partes, quatro partes iguais. Eu usei uma régua [rindo]... Eu tentei... Divida a figura em quatro partes iguais... Eu compreendo nesta maneira... nesta maneira. Quando eu usei uma régua eu tentei... tentei... e só consigo três partes iguais. (S1I:234-240)

.....

R: E como você fez para ter as três partes iguais? (RI:241)

S1: Eu fiz nesta maneira e nesta maneira (mostrou na figura como construiu três quadrados congruentes) e eu consegui três... três... partes iguais. Eu não consigo quatro partes iguais (rir). (S1I:242-244)

R: Que é uma outra tentativa que você pode tentar? É com diversas tentativas que nós podemos obter a solução... (RI:245, 246)

S1: Para ver se for possível ou impossível, eu tentei unir estes dois pontos (estava tentando dividir a figura com segmentos que unem os seus vértices)... E eu obtive quatro partes desiguais. O princípio é aquele para dividir a figura que nós devemos usar rectas... segmentos de rectas... para unir os pontos. Eu fiz muitas tentativas (como) esta... (S1I:247-250)

R: Isto a terceira tentativa... (RI:251)

S1: Sim, é... também não me dá... (S1I:252)

R: Que é que dá aí? (RI:253)

S1: Quatro partes, mas não são iguais... eles não são iguais... Eu tentei sempre unir pontos, como esta figura contém pontos, este ponto, este ponto... Eu tentei unir os pontos com segmentos que dividem a figura a fim de conseguir uma subdivisão... que dê... que dê... 4 partes iguais, mas eu não consegui. Acho que fiz essa tentativa no rascunho... ah não. Eu pus impossível. (S1I:254-258)

.....
R: A minha pergunta é: Esta figura talvez terá aparecido de que figura? É uma parte de uma outra figura. Onde terá aparecido? (RI:261, 262)

S1: (Silêncio). Pôde ter vindo de um quadrado. (S1I:263)

R: Porque? (RI:264)

S1: Se eu prolongo a figura, fico com um quadrado (completa a figura com um quadradinho). (S1I:265, 266)

.....
R: Tinha visto antes isso? (RI:271)

S1: Sim, vi... vi... Mas como se tirou uma parte, quando divido, eu consigo obter somente três partes (mostra como dividiu a figura em três quadrados pequenos congruentes). Quando eu a dividi nesta maneira eu apanho apenas três partes... mas se eu puxar um bocadinho a imaginação e vir que a figura é uma parte de um quadrado, e há uma parte que falta desse quadrado, quando eu trago a parte que falta apanho quatro partes iguais (quatro quadrados pequenos congruentes). (S1I:272-277)

.....
R: Mas a tarefa requer-nos conseguir as quatro partes congruentes da figura dada sem adicionar qualquer coisa. (RI:278, 279)

S1: (Quis apagar a peça adicionada). (S1I:280)

R: Você pode deixá-lo. Agora... depois que você se dividiu a figura em três quadrados congruentes pode você continuar dividi-lo em quadrados congruentes menores? (RI:281, 282)

S1: Sim, eu posso... Eu posso... (S1I: 283)

R: Como? (RI:284)

S1: Eu tento dividir nesta maneira... Estimar o centro de cada quadradinho (dos três quadrados congruentes obtidos previamente). (Juntou os pontos médios dos lados de cada quadrado com segmentos). (S1I:285-287)

R: Dessa divisão pode você ter uma idéia de como...? (RI:288)

S1: Sim. (S1I:289)

R: Qual seria essa ideia, então? (RI:290)

S1: (Em silêncio contava os quadrados pequenos). Então, tenho 12 quadrados pequenos... Yah, ok... Então, cada três quadrados pequenos (rir) eu fico com eh... a primeira parte, a segunda parte... (Construía as partes da figura com três quadrados congruentes pequenos e apanhou quatro partes. Parece ter feito mentalmente a seguinte operação aritmética $12:4=3$). Yeah! (S1I:291-295)

R: Quantas partes congruentes você conseguiu? (RI:296)

S1: Bem, consegui três partes congruentes no tamanho e na forma; mas tenho quatro partes congruentes com a mesma área mas com formas diferentes. (S1I: 297, 298)

.....
R: E tamanho... Pode você tentar uma outra estratégia? Talvez... Ao menos você descobriu um princípio. Qual foi? (RI:307, 308)

S1: Na forma e na área (rir). (S1I:306)

R: Suas partes não podem satisfazer as exigências da tarefa porque você tem três partes congruentes, mas a quarta parte é diferente daquelas, embora tenha a mesma área. Congruência tem que ser... (RI:303-305)

.....
S1: O princípio foi dividir cada quadrado em quatro quadrados menores. Não, dividi primeiro... Eu dividi a figura (dada) em três partes iguais (quadrados). Depois disso eu dividi cada parte em quatro quadrados pequenos. (S1I:309-311)

R: E então... (RI:312)

S1: E eu vi que eu tive 12 quadrados pequenos e eu dividi... 12 quadrados pequenos por 3. Desculpe, 12 quadrados pequenos por 4, então eu apanho quatro quadrados (quatro partes) com 3 quadrados pequenos cada um. Agora eu necessito procurar a forma dos quadradinhos (das 4 partes requeridas)... (S1I:313-316)

R: Esta é a tarefa que você deve fazer em seguida... (RI:317)

S1: Sim, para procurar a forma dos quadrados (que significam as partes) de modo que.. (silêncio longo ao reflectir e ao tentar as formas das partes no papel). (S1I:318, 319)

.....
S1: (Silêncio longo). Então, eu tenho... (silêncio). Yeah, está bem. Acho que apanhei. Eu tenho um (a parte)... dois, três, e quatro. (S1I:321, 322)

R: São quatro partes congruentes ou não? (RI:323)

S1: São quatro partes congruentes. São quatro. Eu tenho este, este, este, e este. São quatro. (S1I:324, 325)

R: Qual é a sua resposta, então? É possível ou impossível? (RI:326)

S1: É possível, é possível (rindo-se). (S1I:327)

R: Que você achou de...? (RI:328)

S1: É interessante, muito interessante. Sim, é possível. (S1I:329)

R: Bem, eu acho... (RI:330)

S1: De facto estas partes são iguais. Este, este, este, e este, são quatro (rindo-se). Muito interessante, yah. (S1I:331, 332)

.....
Student 3

S3: Eu dividi esta figura em três partes iguais. Sim, esta figura está dividida em três partes iguais. Temos três quadrados, temos três quadrados iguais. Então, para dividir em quatro partes iguais quer dizer que, isto é nós temos... um quadrado nós temos quatro partes de um quadrado que é, podemos tirar mais quatro quadrados. Num quadrado podem sair mais quatro quadrados. Então nós queremos que esses quadrados tenham... sejam semelhantes. Sabendo que num quadrado podemos dividir em quatro partes, i.e. se nós fomos a retirar uma parte do quadrado, uma parte do quadrado, por ex temos três quartos partes deste quadrado também temos quatro partes neste quadrado, para que sejam, sejam semelhantes, né devemos tirar uma parte deste quadrado para ficar com três quadrados, tirando mais uma parte deste quadrado também vai ficar com três quadrados. E se nós também voltarmos a tirar uma parte deste quadrado vamos tirar uma parte em cada quadrado. Então isto vai ficar... vão ficar mais outras três partes. Isto é neste quadrado ficaram três partes... não sei se... (S3I:152-164)

R: Continue, continue. (RI:165)

S3: Nesta parte ficaram três partes, nesta parte aqui ficaram mais três partes. Então, e tirando estas três partes, se nós formos a tirar em cada quadrado, também vão formar mais três. (Silêncio). (S3I:166-168)

R: Então qual será a conclusão? (RI:169)

S3: A conclusão é que se nós tirarmos uma parte aqui, neste quadrado depois voltarmos a tirar outra parte deste quadrado, assim ficarão mais três partes. Voltando a tirar mais outra parte deste quadrado e tirando mais uma parte deste quadrado havemos de ter apesar de um não sair exactamente igual ao outro, mas vamos ter quatro, aliás nem chegam a ser quadrados, havemos de ter quatro, quatro figuras geométricas mas com a mesma... com a mesma dimensão, com a mesma área posso dizer. (S3I:170-175)

R: Agora, será que com esta construção tá a responder a pergunta? Esta pergunta diz o que é? Subdivide... (RI:176, 177)

S3: A figura em quatro partes congruentes. (S3I:178)

R: Conseguiu essas quatro partes congruentes? (RI:179)

S3: Nada. (S3I:180)

R: O que conseguiu aí? (RI:181)

S3: Consegui simplesmente ter quatro partes mas que têm a mesma área. (S3I:182)

R: Para serem congruentes o que é preciso? (RI:183)

S3: As quatro figuras têm que ter a mesma... mesma figura geométrica, têm que ser iguais na forma e no tamanho. (S3I:184, 185)

R: Agora é possível com esta figura obter essas quatro partes congruentes? (RI:186)

S3: Não, não. (S3I:187)

.....
R: Se não é possível? Veja então certamente que teve aqui (quatro figuras quase congruentes) porquê? (RI:188, 189)

S3: Sim, pode ser possível, só que prontos, é difícil. (S3I:190)

R: Agora, eu quero que o sr vença essa dificuldade porque praticamente está a 50% da resolução do problema ou mais que 50%. A partir daí pode ter quatro partes congruentes. Agora como? (RI:191-193)

.....
R: Talvez uma pergunta para lhe dar uma luz. Bom, o sr dividiu esta figura em quadradinhos, né? Como é que são esses quadradinhos? (RI:202-203)

S3: São iguais todos. São iguais. (S3I:204)

R: Agora a minha pergunta. Para nós termos quatro partes congruentes, quantos quadradinhos deve ter cada parte? (RI:205, 206)

S3: Deve ter três. (S3I:207)

R: Agora como obter essas quatro figuras? É só fazer jogadas e ver. (RI:208)

S3: (Fazendo tentativas em silencio). Tem sempre uma que aparece diferente. (S3I:209)

R: Não percebi? (RI:210)

S3: Tem sempre uma figura que aparece diferente da outra. (S3I:211)

R: Cada parte tem três quadradinhos. Agora tem que fazer de maneira a conseguir essas figuras congruentes com base... (RI:212, 213)

S3: (Fazendo tentativas em silencio). (S3I:214)

R: Tá quase. Começou bem, só falta concluir. (RI:215)

S3: (Fazendo tentativas em silencio). (S3I:216)

R: Na sua opinião, essas partes congruentes qual é a forma que vão ter? (RI:217)

S3: Dá, dá... um, dois, três, quatro... (conseguiu ter as quatro partes congruentes e sorriu de satisfação). (S3I:218, 219)

.....
R: Explica lá então como conseguiste. (RI:220)

S3: Se tirarmos um (quadrado) em cada quadrado tem quatro partes iguais. Num quadrado tira um, como posso dizer, um quadrado pode-se dividir em quatro quadradinhos iguais, então podemos... se nós tirarmos um quadrado, um quadrado, um quadrado digo, se nós formos a tirar um quadrado, né? Mas um quadrado forma

quatro quadradinhos iguais. Se formos a tirar um quadradinho vai formar uma figura deste... deste.... deste tipo (referindo-se a uma figura em forma de L). Então saindo uma figura deste tipo, então podemos achar (as quatro partes congruentes). (S3I:221, 227)

.....
R: Qual é a diferença entre esta e a primeira estratégia porque também dividiu em quadradinhos, né? Porque também teve aqui figuras em forma de “L” que são as figuras que nós precisamos. Mas porque ali não conseguiu e aqui conseguiu? O que tá ver aí de... (RI:231-234)

S3: Acho que a diferença tá nestes dois aqui. (S3I:235)

R: Nestes dois. (RI:236)

S3: Sim. E este aqui também. Não sei como explicar mas... não sei como explicar. (Silêncio). Acho porque aqui fiz assim: estas três figuras iguais depois quis ligar às outras três. Já não quis tentar fazer da mesma forma. (S3I:237-239)

Student 4

S4: (Lê o enunciado). (Rindo-se). De facto este exercício eh, suscitou em mim um grande paradoxo. Porque na vida nunca tinha visto nada igual, nunca tinha visto nada igual. Quando vi esta figura fiquei muito espantado porque não tinha visto algo parecido. Eh também falando a verdade não acreditei na divisibilidade desta figura. (S4I:140-143)

.....
R: Mas já dividiu. (RI:144)

S4: Quer dizer este... este foi... foi um caminho que eu encontrei. Foi a possível solução, digamos assim, que eu encontrei. Mas mesmo depois de ter feito isto ainda não estou ciente de que seja exactamente igual. Eu achei, eu acreditei em mim mas, não tenho a certeza. Por um simples motivo se eu olho para este lado, não é, olho para este lado, eu não acredito que este lado seja igual a este. (S4I:145-149)

R: Porque é que não acredita? (RI:150)

S4: Por este motivo, daqui até aqui não é igual daqui até aqui. (S4I:151)

.....
R: Em termos de... (RI:152)

S4: Em termos de distância, em termos de distância. Se eu tenho um quadrado nestas situações, eu faço no quadrado passar uma diagonal, seria mais conveniente que eu fizesse isto. Eu teria este lado igual a este, tendo... tendo este ponto como..., tendo este segmento como a mediatriz dos dois lados, certamente será perpendicular e teria este também perpendicular. Mas o que acontece neste exercício, neste exercício segundo a minha óptica foi-me retirada esta parte. (S4I:153-158)

.....
R: Na sua opinião essa figura... (RI:168)

S4: É um quadrado, é um quadrado em que uma parte foi retirada. (S4I:169)

R: Continue. (RI:170)

S4: Então, sendo este um quadrado, se for a passar daqui uma diagonal eu vou dividir este quadrado em duas partes iguais. (S4I:171, 172)

R: Continue. (RI:173)

S4: Então, sendo assim, retirou-se uma parte, retirou-se uma parte, fiquei com isto, procurei sendo... conforme a minha explicação, este é o ponto médio. É esta diagonal, esta suposta diagonal que divide este quadrado em duas partes iguais. Então se esta divide em duas partes iguais, então eu procurei o ponto médio, o ponto médio desta

parte que sobrou, que é o ponto médio. Então fazendo uma paralela relativamente a este lado dividi esta parte em duas partes que eu julgo serem iguais. (S4I:174-179)

.....
R: Porque é que julga que são iguais? (RI:180)

S4: Por simples motivo. A distância daqui até aqui é a mesma. E esta distância que leva daqui até aqui acredito que seja a mesma daqui até aqui. (S4I:181, 182)

R: Tem a certeza? (RI:183)

S4: Não absoluta. Mas eu... não, não é, não é (rindo-se). Este segmento é mais prolongado. Mas segundo o meu raciocínio ao dividir esta parte com esta, esta parte até aqui e daqui até aqui, já que temos este, divido este em duas partes e divido este em duas partes. Talvez, talvez a preocupação era mais dividir e ter quatro partes de divisão. Para a minha análise depois quando cheguei a casa, eu pude ver que o que está acontecer aqui é que este lado é igual a este, para a divisão que eu fiz. (S4I:184-189)

R: Qual lado? (RI:190)

S4: Esta parte é igual a esta. E esta é igual a esta. E pela conclusão que eu tive não fui feliz ao pedido: subdivida a figura em quatro partes congruentes. (S4I:191, 192)

.....
R: Porque não foi feliz? (RI:193)

S4: Porque acho que... se é congruente tem que ser igual na forma e tamanho. (S4I:194)

R: E aqui o que acontece? (RI:195)

S4: Aqui eu tenho mais ou menos ser igual na forma mas não no tamanho. Daí acho que não fui feliz. A forma é a mesma, eu concordo que seja mais ou menos a mesma. Mas o tamanho não é igual. Daí que não obedeci o critério de congruência, que tem que ser igual na forma e no tamanho. (S4I:196-199)

R: E qual é a sua conclusão? (RI:200)

S4: A minha conclusão é que esta... esta divisão não está correcta depois de ter dividido. Mas conforme eu disse no princípio da... da... como é que é da minha análise sobre esta figura eu acho-a indivisível (rindo-se). E esta foi uma maneira que eu encontrei. (S4I:201-203)

R: Quer dizer a sua ideia é que não é possível resolver este exercício. (RI:204)

S4: Sim, eu chamarei um problema insolúvel. (S4I:205)

R: Ok. (RI:206)

S4: Esta foi uma maneira, uma abstracção que eu tive. É como quem diz: deixa tentar. Mas após... após a minha exercitação mental dividindo de várias maneiras, verifiquei que esta maneira era a mais correcta. Quando cheguei a casa continuei a resolver o problema. Caso me tivesse apercebido que este segmento era maior que o outro já teria concluído que o problema é insolúvel. (S4I:207)

.....
R: Num dos métodos que o sr apresentou afirmou que essa figura tinha aparecido dum suposto quadrado, não é? (RI:238, 239)

S4: Sim, sim. Esta... esta divisão que eu fiz partiu do princípio que era um quadrado. (S4I:240)

R: Agora com base nesse conceito quadrado é possível povoar com quadradinhos nesta figura? (RI:241, 242)

S4: Povoar com quadradinhos? (S4I:243)

R: Quer dizer construir quadradinhos nesta figura. Partimos do suposto quadrado. (RI:244)

S4: (Esboça um quadrado.) Eu acreditei que se tirou uma parte, que seria mais ou menos o ponto médio. (S4I:245, 246)

R: Pode tirar essa parte e construa quadradinhos na parte sobrança. (RI:247)

S4: Vamos lá ver. (Fazendo o esboço). Seria ter-se tirado esta parte, não é? (S4I:248)

R: Sim, continue. (RI:249)

S4: Não, são três quadrinhos. Tentando construir quadrinhos também não é possível obter quatro partes congruentes. (S4I:250, 251)

R: Conseguiu quantos quadrinhos aí? (RI:252)

S4: Aqui são... se for em termos de equitatividade são um, dois, três quadrinhos. (S4I:253)

R: E estão a pedir... (RI:254)

S4: Quatro. (S4I:255)

R: E nesses três quadrinhos é possível dividir em outros quadrinhos?

S4: Eu creio que é possível. (S4I:257)

R: É possível? (RI:258)

S4: Creio que sim. (S4I:259)

R: Então faça esse trabalho. (RI:260)

S4: (Silêncio). (S4I:261)

R: Então o que tá a fazer aí? (RI:262)

S4: A divisão dos quadrinhos. (S4I:263)

R: Como tá a construir esses quadrinhos? (RI:264)

S4: Estou a dividir... estou a tentar... tentar dividir cada quadrado em quatro partes iguais. (S4I:265, 266)

R: Como é possível fazer-se isso? (RI:267)

S4: Da mesma maneira como dividi o quadrado inicial em quatro partes iguais posso também dividir cada quadrado em quatro partes iguais. (S4I:268, 269)

R: Continue. (RI:270)

S4: Posso tomar cada quadrado como se fosse uma unidade inteira. (Continuando a dividir os quadrados em quatro partes congruentes). Será que se vai verificar o contrário aqui? (S4I:271, 273)

R: Como assim? (RI:274)

S4: Relativamente a minha teoria de que o problema é insolúvel, a minha conclusão de que não é divisível. (Rindo-se). (S4I:275, 276)

R: Vamos fazendo tentativas, né? (RI:277)

S4: Uhm... Isto é geometria, geometria, geometria... (Falando sozinho e baixinho enquanto resolvia). (S4I:278, 279)

R: Tá fazer o que é? Tá falar sozinho? (RI:280)

S4: (Rindo-se). Não, não. O meu raciocínio é o seguinte: Se aqui são congruentes e cada quadrado é igual... esses quadrados são iguais, não é? (S4I:281, 282)

R: Continue. (RI:283)

E: Dividi cada quadrado, dentre os quadrados que estão no interior, em quatro partes iguais, não é? (S4I:284, 285)

R: Continue. (RI:286)

S4: Então, ao todo esses quadrados são doze, não é? São doze. Mas pedem-me para dividir esta unidade em quatro partes iguais, em quatro partes iguais. Então segundo o critério de congruência diz que para que as figuras sejam congruentes devem ser iguais em tamanho e forma. Então se são doze quadrados então quer dizer que cada par, não é, cada par, não é, segundo o meu raciocínio, é que cada par deverá ser composto por três quadrados. (S4I:287-292)

R: Mas doze a dividir por três é quatro, então deviam ser quatro partes. (RI:293)

S4: Sim são quatro partes que devem, que devem sair. Mas cada parte com três quadrados. (S4I:294, 295)

R: Continue o seu raciocínio. Tá a procura de... (RI:296)

S4: De um lápis. Queria pintar para ver se isso... se torna real ou não. Então, aqui estão três, é uma parte. Posso pintar este assim, é uma parte. Não, não pode ser assim. (Falando baixo e pintando os quadradinhos). O que está ser difícil é formatar as... as figuras geométricas. (Falando para si e tornando a pintar). Que tal se eu fizesse isto. Nada. Não tá certo (rindo-se). Quer dizer eu vejo a solução, o que falta é a organização. (Continuando a pintar para ter as quatro partes congruentes). Não, não sai. (S4I:297-302)

R: Qual é a sua conclusão? (RI:303)

S4: O que estou a conseguir são três... são... são três formas, não é, são três formas congruentes, congruentes e uma que não é, uma que não é. (S4I:304-305)

.....
R: Já tentou várias possibilidades? (RI:306)

S4: Estou tentando várias possibilidades que seria esta e esta, esta e esta... a medida que eu vou dividindo terei um, dois, três, é uma unidade. Teria um, dois, três é uma outra unidade... Continuo a cair no mesmo resultado. (S4I:307-309)

R: Porque não procura uma outra possibilidade? Tou a ver que sempre tá cair nas mesmas dificuldades. (RI:310, 311)

S4: As possibilidades que eu tenho aqui... vou arranjar um outro esquema... três... três... três... (formando figuras congruentes com três quadradinhos usando várias possibilidades). Nada, desisto (rindo-se). (S4I:312-314)

R: Porque desiste? Tá quase para chegar a solução. (RI:315)

S4: O que sempre acontece é que... o que se pretende aqui... o que está em causa é a condição de congruência. Sempre consigo ter três partes iguais. Sempre consigo. Mas chega uma altura em que já consigo uma parte assim... uma parte solta. Já não verifica a condição de congruência. E esse é um problema e não posso considerar congruente porque a maioria [das figuras] é congruente. (Faz outra vez a revisão dos métodos que usou para adquirir as figuras e sempre depara-se com o problema duma figura que não é congruente às outras). Sempre me deparo com o mesmo problema. Tanto ao começar deste lado ou do outro. (S4I:316-323)

R: E se começar do outro lado para além destes dois lados que escolheu? (RI:324)

S4: Deste lado. (S4I:325)

R: Daqui. (RI:326)

S4: Daqui? Teria, um, dois, três, seria uma parte. Seria uma parte, um, dois, três seria o mesmo esquema (figura). Vamos lá ver, um, dois, três, já se exclui mais dois. (Não foi bem sucedido). (S4I:327-329)

R: Faça, um, dois, três usando esta forma (em forma de L). (RI:330)

S4: Usando esta forma, um, dois, três... (S4I:331)

R: Começando daqui... (RI:332)

S4: Um, dois, três, ok... Teria também um, dois, três, já estão ocupados, eh... para aqui seria quatro, cinco, seis, é uma forma, uma forma, então (rindo-se), quatro, cinco, seis, então teria sete, oito, nove... (concluiu satisfatoriamente com um riso de alegria). Este exercício é terrível! Quer dizer a partir da altura em que consegui abstrair que deveriam ser três quadradinhos cada, não é, três quadradinhos cada, eu já sabia que no máximo só poderiam ser doze, não é? Não, ou poderiam ser mais que doze. Mas o problema é a organização. A questão em causa é o conceito de congruência, que não poderia dizer que são congruentes apanhando formas diferentes. Não sei se existe um outro método além deste. (S4I:333-341)

R: Acho que pode explorar, né? (RI:342)

S4: É... é divisível (rindo-se). É divisível. Não sei se alguém acertou! (S4I:345)

R: Então qual é a sua conclusão depois de tudo isto? (RI:344)

S4: É verdade. (S4I:343)

.....

Student 5

S5: No exercício 2 eu não respondi nada. Não tive... tentei para ver se podia fazer alguma coisa, mas não apareceu nada para que me pudesse ajudar. (S5I:107, 108)

R: Quais são as tentativas que fez? (RI:109)

S5: Em primeiro lugar, tentei traçar, tentei traçar uma recta unindo esses pontos... (S5I:110)

R: Uniu que pontos? (RI:111)

S5: Tentei unir estes pontos. (S5I:112)

R: Os que estão mais distantes. (RI:113)

S5: Queremos 4. Basicamente foram estas tentativas que fiz. (S5I:119)

R: Qual foi a outra tentativa? (RI:116)

S5: Fiz esta divisão. (S5I:117)

R: Fazendo esta divisão teremos 3 partes congruentes, mas nós queremos 4. (RI:118)

S5: Depois fiz isto. E consigo ter 4 partes mas não são iguais, não são iguais. Então deixei. Este exercício mesmo não consegui. (S5I:114, 115)

.....

R: Agora, para este caso as 3 partes são congruentes? (RI:120)

S5: Eu... eu... eu... fiquei a pensar... o que me levou a duvidar foi... foi... foi o método que utilizei para mostrar que esse seria o ponto médio deste segmento aqui. (S5I:121, 122)

R: Não conseguiu demonstrar? (RI:123)

S5: Porque se desenhasse essa parte que falta completaria um quadrado. (S5I:131)

R: Agora, o que acha? Esta figura teria aparecido de que figura? (RI:128)

S5: Penso eu de... de um quadrado. (S5I:129)

R: Porque afirma dessa maneira? (RI:130)

S5: Não consegui demonstrar. Eu... eu... eu acho que medi aqui e medi aqui para ver se era igual. Tornou-se-me difícil para afirmar com segurança que este seria o ponto médio. Se a medida fosse exacta e divisível teria dito que este seria igual a este. Poderia medir o segmento e dividir por dois. Seria igual. (S5I:124-127)

.....

R: Completaria um quadrado. Agora como usar esse conceito quadrado para poder ter outras ideias para resolver o problema? (RI:132, 133)

S5: Se isto fosse um quadrado, se isto fosse um quadrado poderia dividir a figura em 4 partes iguais. (S5I:134, 135)

R: Pode experimentar desenhar? (RI:136)

S5: (Completa a figura e tem-se um quadrado e divide-o em 4 partes iguais). (S5I:137)

S5: Se nós tirarmos esta parte ficaria mais complicado ainda. (S5I:139)

R: Esta parte não nos é dada. (RI:138)

.....

R: Mas tirando esta parte, quantas partes restariam? (RI:140)

S5: (Silêncio). Traçar as diagonais? (S5I:141)

R: Não. Dividiu o quadrado em 4 partes. Tirando uma parte, quantas partes restam? (RI:142)

S5: Restam 3. (S5I:143)

R: Pode desenhar as 3 partes. (RI:144)

S5: (Destacando as 3 partes). (S5I:145)

R: Seriam quantos quadrados? (RI:146)
S5: São 3. (S5I:147)
R: Congruentes ou não congruentes? (RI:148)
S5: Teria que medir. (Mediu os quadrados). (S5I:149)
R: Agora, aqui temos 3 quadrados congruentes, não é? (RI:150)
S5: Sim. (S5I:151)
R: É possível construir mais quadrados que sejam congruentes entre si? (RI:152)
S5: Construir quadrados? (S5I:153)
R: Ia. Dividir a figura em quadrados. (RI:154)
S5: (Silêncio). (S5I:155)
R: Tendo um quadrado quantos quadrados podemos construir? (RI:156)
S5: Tendo um quadrado podemos dividir este por dois... Poderia ter 4 quadrados. (S5I:157)
R: Cada quadrado teria quantos quadrados? (RI:158)
S5: 4. (S5I:159)
R: Pode desenhar. (RI:160)
S5: (Desenhando os quadrados na figura dada). 4 aqui, 4 aqui e 4 aqui. (S5I:161)
R: Qual é a relação que existe entre esses quadrados? (RI:162)
S5: Eu penso que esses quadrados têm a mesma medida. (S5I:163)
R: Que medidas? (RI:164)
S5: Dos lados. (S5I:165)
R: E assim como pode considerar esses quadrados? (RI:166)
S5: São iguais. (S5I:167)
R: Então com base nisso possível construir 4 partes congruentes nesta figura? (RI:168)
S5: (Silêncio). (S5I:169)
R: Quantos quadrados conseguiu? (RI:170)
S5: São 12, são 12. (S5I:171)
R: Então se quer 4 partes congruentes, cada parte quantos quadrados vai ter? (RI:172)
S5: Vai ter... (silêncio). (S5I:173)
R: Vai ter... (RI:174)
S5: Três. (S5I:175)
R: Três o que é? (RI:176)
S5: Três pares. (S5I:177)
R: Três pares? (RI:178)
S5: Quando temos 12 quadrados precisamos de 4. (S5I:179)
R: 4 o que é? (RI:180)
S5: 4 partes iguais. (S5I:181)
R: Então, cada parte tem 4 quadrados? (RI:182)
S5: (Silêncio). Tem 3. (S5I:183)
R: São 4 partes congruentes e cada parte tem quantos quadrados? (RI:184)
S5: 3. (S5I:185)
.....
R: Se escolhesse uma figura com três quadrados qual seria? E pode sombrear? (RI:190)
S5: Poderíamos escolher por ex esta. (S5I:191)
R: E a outra qual seria? (RI:192)
S5: Esta. (S5I:193)
R: Exacto. Qual é a outra parte? (RI:194)
S5: Pode ser esta. (S5I:195)

R: Quantas partes congruentes conseguiu? (RI:196)
S5: Neste momento são 3. (S5I:197)
R: E a quarta parte? (RI:198)
S5: Tenho esta figura com 3 quadradinhos iguais... (S5I:199)
R: Mas esta figura é congruente às outras? (RI:200)
S5: Não. (S5I:201)
R: Qual é a outra tentativa? (RI:202)
S5: (Tentando formar 4 partes congruentes). (S5I:203)
R: O que se passa? (RI:204)
S5: Esta tentativa também não dá (rindo-se). (S5I:205)
R: Talvez uma outra tentativa? Comece neste canto. (RI:206)
S5: É muito complicado. Parecia fácil quando descobrimos que as partes congruentes tinham que ter 3 quadradinhos. (S5I:207, 208)
R: Comece desse lado. (RI:209)
S5: (Experimentando uma outra alternativa). Continua a não dar. (S5I:210)
R: Continua? Agora experimente a partir daqui. (RI:211)
S5: Esta parte é congruente a esta, esta com esta e esta com esta. (S5I:212)

.....

R: Então o que acha? Qual foi a estratégia que usou até chegar a conclusão? (RI:213)
S5: Primeiro dividi a figura em 3 partes iguais e obtive esses quadrados. (S5I:214)
R: E depois? (RI:215)
S5: E cada quadrado por sua vez foi dividido em 4 partes iguais. Então ao todo os quadradinhos perfizeram 12. (S5I:216, 217)
R: Continue. (RI:218)
S5: Como nós precisamos de 4 partes iguais, então dividimos 12 por 3, aliás por 4. (S5I:219)
R: Depois? (RI:220)
S5: Então tínhamos que ter 3 partes iguais. Então dividimos... portanto os 3 quadrados... eu estava a dizer que nós tínhamos 12 quadradinhos e precisávamos de 4 partes. Dividimos por 4. E vimos que tínhamos de dividir os 12 quadradinhos portanto, eh... tínhamos que encontrar três quadradinhos. (S5I:221-224)
R: Continue. (RI:225)
S5: Portanto totalizamos os quadrados em forma de L. **(Dificuldades em descrever a estratégia seguida?)** (S5I:226, 227)
R: Ao compreender que cada parte congruente devia ter 3 quadradinhos, não é? (RI:228)
S5: Sim, sim. (S5I:229)
R: Começou a fazer tentativas e conseguia ter 3 partes congruentes e não conseguia ter 4. (RI:230)
S5: Sim, sim. (S5I:231)
R: Agora como conseguiu de maneira a ter 4 partes congruentes? (RI:232)
S5: É procurar portanto 3 quadradinhos iguais. E depois aproveitar... aproveitar para obter 4 partes iguais. (S5I:233, 234)

.....

R: Mais alguma coisa que quer dizer sobre este exercício? (RI:235)
S5: Eu estou a ver que a minha grande dificuldade de facto foi o problema de geometria porque... é verdade que tive um curso... um curso de matemática, mas não dei geometria, não dei geometria. Eu achei... ah... o mais difícil é encontrar a relação entre... entre os quadrados que eu devia tratar. Porque esta ideia de dividir os quadrados eu tive. Mas a de tornar a dividir eu não tive. Significa faltou-me a... a... a relação.

Faltou-me relacionar. Talvez a maneira que eu dividi... a figura em 3 quadrados, podia voltar a dividir em quadradinhos. (S5I:236-242)

R: Disse que fez matemática mas não fez geometria. Eu não entendi essa parte. Pode explicar-me isso? (RI:243, 244)

S5: Quando nós fizemos o curso, né, tínhamos álgebra, também tínhamos geometria. O que acontecia é que se dava álgebra e... e deixava-se geometria para o fim. E muitas das vezes parecia que quase não se dava. Dava se cabo da geometria. (Ensino deficiente da geometria). (S5I:245-248)

R: Fez que curso? (RI:249)

S5: Eu fiz o Instituto Médio Pedagógico. Mas isso não significa que é um caso geral. Eu tive algumas noções de geometria, mas não chegamos de aprofundar. Os conhecimentos que eu tenho são conhecimentos que eu adquiri ao longo das minhas leituras independentemente. Também fi-lo há um bom tempo. **(Estudo individual para tapar a lacuna).** (S5I: 250-254)

.....

Student 7

R: As partes que subdividiu são congruentes? (RI:103)

S7: (Silencio). (S7I:104)

R: Como fez a subdivisão? (RI:105)

S7: Se fossem duas partes, seria isto. (S7I:106)

R: Três partes seria possível também? (RI:107)

S7: Três partes... (Silencio). Três partes estão aqui. (S7I:108)

R: Quatro partes? (RI:109)

S7: Quatro partes? (Rindo-se). Quatro partes... (S7I:110)

R: O objectivo é obter 4 partes congruentes. (RI:111)

S7: É impossível. (S7I:115)

R: Aqui pretende-se quatro partes congruentes. Entretanto qual foi a sua resposta? (RI:114)

S7: Primeiro dividi e consegui duas partes (congruentes). Depois subdividi em quatro partes. Mas não são congruentes. Mas acho que são semelhantes. (S7I:112, 113)

.....

R: É impossível? Talvez com mais tentativas. Pode me dizer esta figura vem de que figura? (RI:116, 117)

S7: De um quadrado. **(O caminho para a solução deste exercício está na mente do E entretanto falta activar com um palpite).** (S7I:118, 119)

R: Porquê vem do quadrado? (RI:120)

S7: Porque ao prolongar este segmento e o outro. Desde que sejam paralelas a este (lado) e aquele (lado). Esta figura é um quadrado, só que tiramos uma parte. Dividindo este quadrado podemos obter quatro partes (congruentes). (S7I:121-123)

R: Usando essa ideia é possível subdividir esta figura (a dada) em quatro partes congruentes? (RI:124, 125)

S7: Um quadrado é possível dividi-lo em quatro partes congruentes. (S7I:126)

R: Não o quadrado, esta parte (referindo-se a figura dada). (RI:127)

S7: (Rindo-se). (S7I:128)

R: Usando o conceito “quadrado” como pode transformar a nossa figura de maneira a obter quatro partes congruentes? (RI:129, 130)

S7: (Silencio longo). (S7I:131)

R: Então conseguiu três quadrados congruentes. É possível obter quadradinhos nesses quadrados? (RI:132, 133)

S7: (Tentando ter quadradinhos na figura dada em silencio). (S7I:134)

R: Quantos quadradinhos obteve e qual é a relação entre eles? (RI:135)

S7: (Silencio). (Sorrindo). (S7I:136)

R: Está a sorrir talvez apanhou alguma coisa, não é? (RI:137)

S7: (Silencio). (S7I:138)

R: Pode explicar o que está a fazer? (RI:139)

S7: (Silencio longo). (S7I:140)

R: Já tem a conclusão? (RI:141)

S7: (Rindo-se). Mudei de ideias. (S7I:142)

R: Como é que mudou de ideias? (RI:143)

S7: Eu dividi em 3 quadrados. Os 3 quadrados subdividi-os em quadradinhos. Encontrei em cada quadrado 4 quadradinhos. Então somando os quadradinhos, tive 12 quadradinhos, 12 quadradinhos. Então eu quero dividir a fig em 4 partes iguais. Então é só levar os 12 quadradinhos e dividir por 4, 4 partes. Então quer dizer a relação é de 3 quadradinhos para cada parte. (S7I:144-148)

R: Continue. (RI:149)

S7: Então dividimos 4 quadradinhos, aliás 3 desculpa, 1, 2, 3 constitui uma figura, é a 1ª parte; 1, 2, 3 é a 2ª parte; 1, 2, 3 é a 3ª parte; 1, 2, 3 é a 4ª parte. (S7I:150-151)

R: Então, qual é a sua conclusão? (RI:152)

S7: (Rindo-se). Tem solução. É possível, é possível. (S7I:153)

.....
R: Por acaso pode encontrar um outro método para resolver este exercício? (RI:154)

S7: Uhm... (Silencio longo). Além do método... além do método de quadrados, existe o método de triângulos. **(O S7 depois de suceder-se bem neste exercício ainda tem outras ideias de resolução).** (S7I:155-157)

R: Pode explicar-me como pode fazer? (RI:158)

S7: Posso desenhar? (S7I:159)

R: A vontade. (RI:160)

S7: (1º traçou os 3 quadrados; 2º traçou as diagonais dos quadrados obtendo assim 6 triângulos congruentes.). (S7I:161, 162)

R: Então a que conclusão chegou? (RI:163)

S7: Agora tenho 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tenho 6 triângulos congruentes, 6 triângulos congruentes. Os 6 triângulos congruentes divididos por 4 vão dar... vai dar um número... um número decimal. Então, não vai dar um nº perfeito. Temos que dividir mais. Vamos unir este vértice com este vértice. Assim neste quadrado saiem 4 triângulos. Também unindo este vértice com este saiem 4 triângulos. Também unindo este vértice com este saiem 4 triângulos. Então, tenho 1, 2, 3, 4, ... Tenho 12 triângulos. Então dividindo 12 por 4 partes vai dar 3. 3 triângulos. (S7I:164-170)

R: Então como ficariam as figuras, as 4 partes congruentes? (RI:171)

S7: Bom, a 1ª parte 1, 2, 3... (silencio longo). (S7I:172)

R: Quantas partes congruentes devem ser construídas? (RI:173)

S7: 4. (Fazendo várias tentativas). (S7I:174)

R: Qual é a conclusão? (RI:175)

S7: 1, 2, 3... 1, 2, 3... (Silencio longo fazendo ainda várias tentativas).

R: Então qual é o seu raciocínio? (RI:177)

S7: Consigo 4 partes, mas só que há partes congruentes i.e. partes que têm igual tamanho e igual forma. (S7I:178, 179)

R: Continue. (RI:180)

S7: Encontrei 3 figuras com a mesma forma e uma... uma diferente, uma diferente. Então não cumprem com as regras de congruente. Acho que existe uma outra forma. Podem existir outras (rindo-se). Nunca se diz nunca. (S7I:181-183)

.....

Task 3

Student 1

S1: (Lê o enunciado do terceiro exercício em voz audível). Bom, aqui eu... eh... eu aqui tracei essa pirâmide. Eu pensei da seguinte maneira. Talvez estou a pensar certo ou estou a pensar errado. Eu pensei da seguinte maneira. (S1I:335-337)

R: O que se quer é a sua compreensão. (RI:338)

S1: Eu pensei da seguinte maneira. Nós temos aqui um cubo. (S1I:339)

R: Continue. (RI:340)

S1: Um cubo, o cubo é como se fosse um... prisma. É um prisma por assim dizer. É um prisma. O cubo é um... Ok, eh...a pirâmide, esta pirâmide que está aqui dentro tem a mesma altura, e tem a mesma área da base com o cubo. (S1I:341-343)

R: Continue. (RI:344)

S1: Vou repetir. A pirâmide tem a mesma altura, e tem a mesma área da base. Então, numa das definições, vou chamar definição, para nós podermos ter o volume da... pirâmide, o volume da pirâmide partindo dum prisma recto, nós dissemos que, quando temos a pirâmide dum prisma recto com a mesma área da base e a mesma altura então, a área da pirâmide cabe 3 vezes dentro do... prisma que tem também a mesma área da base e a mesma altura. Peguei nessa teoria e (algo imperceptível). Fiz aqui um pequeno exercício, (algo imperceptível), dados BC são 3 cm, pode ser em qualquer sítio né, então calculei o volume do cubo. O volume do cubo é igual a área da base vezes altura, então a área da base neste caso 9 cm^2 vezes 3 deu 27 cm^3 . Então, o volume da pirâmide, da pirâmide é igual a área da base vezes altura sobre 3. Dividi, deu 9 cm^3 . Então, no cubo podem caber 3 pirâmides congruentes, visto que o cubo de 27 cm^3 de volume, uma pirâmide com a mesma área da base e mesma altura tem 9 cm^3 de volume, logo cabem 3 vezes. (S1I:345-357)

.....

R: Para o exercício... (RI:358)

S1: Para o exercício, então... caberá no cubo mais alguma pirâmide congruente a [ABCDH]? Então [ABCDH]. Se sim apresente-a(s). Então, temos aqui [ABCDH] está aqui representado, [EFGHB] bom, eu aqui, peguei na primeira imaginação, eu inverti, vi, peguei isto como base EFGH, é a base, depois tem a altura, EFGH é a base, B... deste lado, portanto, base e o segmento que vai partir por exemplo de H até B. Então, nesse caso tem-se esta parte como altura. Da mesma forma que temos ABCD do B partimos para o H, também podemos ter EFGH, do F partimos para o B e temos a altura de um triângulo. Então observado o cubo deste lado, temos BCGF, do F podemos ir até H. (Silencio). Do F, não, não vamos para H. Do F não vamos para H, vamos até E. Do F vamos até E. Temos um triângulo a base está deste lado onde... (S1I:359-368)

R: B... B... (queria perceber o raciocínio do estudante). (RI:369)

S1: Temos BCGF, então vai ser a base duma outra pirâmide que vai se projectar para o ponto E. (S1I:370,371)

R: Estas pirâmides não se intersectam entre si ou intersectam-se? Porque o importante é como caber, né. (RI:372, 373)

S1: Yah, caber, yah, não se intersectar, vamos ver, não funciona. Bom, o que eu sei, esta aqui que projecta para o H, e este do H que projecta para o B não se intersectam. Acho que não. (S1I:374-376)

R: Enconstam-se apenas assim, vamos ver. Então, tem ABCDH e depois a base... (RI:377)

S1: A base é esta, né? Esta é base. (S1I:378)

R: Mas pode desenhar esta pirâmide, esta aqui? (RI:379)

S1: Esta segunda? (S1I:380)

R: Yah, para ver como é que fica. Talvez, yah... (RI:381)

S1: Então fica, este... (Silencio). Então, deste ponto... desce para aqui. Então os pontos todos... (Silencio longo). (S1I:382, 383)

R: Será que não se intersectam? O que é que acha? (RI:384)

S1: Estas duas pirâmides acho que não se intersectam. (S1I:385)

R: Não se intersectam? (RI:386)

S1: Não se intersectam. Enconstam-se apenas no segmento HB. Que vai servir por uma... chamada geratriz. De D para H sobe o ponto baixo, o ponto alto. Então este ponto desce até aqui. (S1I:387-389)

R: Este ponto do lado de cá, não é? Esta parte... (RI:390)

S1: Vem assim, deste ponto vai descendo até este ponto, então ali se encostam assim, mas não se intersectam. (S1I:391, 392)

R: Encostam-se nesta aresta ou enconstam-se numa face, o que acha? (RI:393)

S1: Eu acho que se encostam apenas... numa aresta. Não, não, encostam-se apenas numa... numa aresta isso mesmo. (S1I:394, 395)

R: Numa aresta ou num lado talvez? (RI:396)

S1: Lado não, lado não, lado não. Eu digo lado não, porque... se eu tenho... (algo imperceptível). Então B até H... (Silencio). (S1I:397, 398)

R: Ok, mas, ok, e qual seria a outra? (RI:399)

.....
S1: Yah, (silencio). A terceira... (silencio). Não pensei nesse assunto de se encostarem, eu vi isso no volume, e não vi nas pirâmides (rindo-se) como figuras, como sólidos, aliás. (S1I:400, 401)

R: Aqui vem apresente-as, não é? (RI:402)

S1: Yah. (S1I:403)

R: Além de serem 3 [pirâmides]... (RI:404)

S1: Yah. (S1I:405)

R: É preciso saber quais são, não é? (RI:406)

S1: Yah. Duas...duas... duas consigo ver. Duas figuras, uma assim e outra... onde a... a maior inclinação encontra-se no segmento BH, a maior inclinação encontra-se no segmento BH. (Silencio). As outras duas... a outra que falta está separada. (Silencio). (S1I:407-409)

R: Está separada, o que significa está separada? (RI:410)

S1: Eu vejo aqui... (Silencio). Eu vejo aqui... (Silencio). (S1I:411)

R: Isto é uma pirâmide, não é? (RI:412)

S1: Yah. É de facto. É esta aqui. Esta HEFG e... e... e B, ok. Então, a outra... (Silencio longo). (S1I:413, 414)

R: Quer construir? (RI:415)

S1: Estou aqui para construir, depois tracejar para me facilitar a percepção. (Silencio). Aqui tenho o B, o B (querendo dizer o C), o D, o A e o H. (Silencio). Então, falta o terceiro, a terceira pirâmide. A terceira pirâmide que havia projectado ela... Assim já passa a intersectar. (S1I:416, 419)

R: Esta... esta... (RI:420)

S1: Yah, yah. (S1I:421)

R: Intersecta qual pirâmide ou intersecta as duas? (RI:422)

S1: O que estou a ver era BCGFE acho que vai para aqui. (S1I:423)

R: Intersecta as outras né? (RI:424)

S1: Sim, intersecta. Mas só que assim como está sobra dois espaços laterais, que esses dois espaços laterais assim juntos formam uma outra pirâmide. (S1I:425, 426)

.....
R: Mas como pode fazer isso? (RI:427)

S1: (Silêncio). Não consigo sustentar isso. Mas estou... mas estou a ver isso aqui. Porque estas duas pirâmides quando eh... se encontram no segmento, neste segmento AB... (silêncio). Deste yah... Não, não é este. (Algo imperceptível). É AB? Não. Não é neste. É no segmento este aqui. Desculpe neste. (S1I:428-431)

R: Que segmento é? (RI:432)

S1: HB, HB. Neste segmento. Quando juntamos as duas pirâmides encontram-se neste segmento, então sobram espaços vazios dentro do cubo. (S1I:433, 434)

R: Mas o que acha, será que haveria uma outra escolha de maneira a encontrar as 3 pirâmides bem nítidas e não se intersectam? É possível encontrar essa possibilidade? Ou acha que este é o caminho para encontrar as pirâmides? (RI:435-437)

S1: Eu acho que (silêncio). Eu corri só fiz... Bom eu parti do princípio, a primeira base está ocupada para a pirâmide demonstrada. Esta primeira base. Então fui ver a base de cima para ter uma outra pirâmide, cuja base está livre né? Eu construí esta. Virada para baixo. Então, quanto faço isto, vejo dois espaços (silêncio). (S1I:438- 441)

R: Estes dois espaços vazios... (RI:442)

S1: Ah... (S1I:443)

R: Podemos construir de tal maneira que possa constituir uma outra pirâmide ou... (RI:444)

S1: Eu ainda estava a ver se os espaços vazios ficavam... ficavam duas pirâmides... triangulares parece-me. (S1I:445, 446)

R: Pode desenhar? (RI:447)

S1: Estava a tentar fazer isso mesmo. Ficavam duas pirâmides triangulares, que ao juntar... Ficavam duas pirâmides triangulares. Mas, aqui precisam duas pirâmides quadrangulares. Então, sobram duas pirâmides triangulares. Só que estas triangulares quando já juntamos formam uma pirâmide quadrangular. (S1I:448-451)

R: Pode mostrar aqui, como vão ser essas pirâmides triangulares? Pode mencionar? (RI:452)

S1: (Silêncio longo). (S1I:453)

: Consegue visualizar essas duas pirâmides triangu...? Disse duas pirâmides? (RI:454)

S1: Yah, consigo imaginar, mas eh (rindo-se) não, não estou a ver como posso verificar né, em forma de... consigo, não sei como posso explicar. (S1I:455, 456)

R: Pode esboçar talvez. Como é que... ou... se puder na própria figura ou aqui, pois... (RI:457)

S1: (Silêncio). (Algo imperceptível). Tinha que arranjar uma base... Tudo eu nesta pequena imaginação que estou a tentar, parti do princípio que o segmento BH, é o sítio onde as duas pirâmides se encontram. A pirâmide de cima para baixo, de baixo para cima. Elas se encontram no segmento que é, de facto eu chamo aqui, uma aresta. Encontram-se numa aresta. Elas encontram-se, deixam um espaço vago deste lado, deixa um espaço vago deste. As duas pirâmides, uma virada para baixo, a outra de baixo para cima. Há um ponto, há um ponto, que é o ponto HB onde elas se encontram, se intersectam. Se intersectam não, se encontram, enconstam-se. E aqui onde se

encontram, uhm, deixa aqui, se tocam assim por exemplo, deixa aqui um espaço vazio, um espaço vazio... deste... um espaço vazio que este espaço vazio tem este quadrado todo... tendo este quadrado todo já não dá para dizer que no quadrado temos o ponto E (algo imperceptível). Já não dá. (Silencio). Encontram-se aqui neste ponto, encontram-se neste ponto. Encostam-se e fica aqui um vácuo, um vácuo. Consigo entender que aqui é um vácuo. E então a ideia que eu tenho, eu digo que são dois... são dois vácuos que juntados formam uma... uma outra pirâmide. Fica um vácuo deste lado e fica um outro vácuo deste lado. Duas pirâmides têm um ponto, um segmento onde se encontram. Fica um vácuo deste, fica um vácuo doutro. Esses dois vácuos, eu não consigo idealizar em forma de figuras dois vácuos. Mas eu penso que esses dois vácuos juntados formam uma pirâmide congruente às outras duas. (Silencio). (S1I:458-476)

.....
R: É um caminho, mas poderia haver um outro que é mais explícito. Vamos ver, olha, esta pirâmide, aquela... (RI:477-478)

S1: (Silencio). Bom, é que estamos... estamos aqui limitados. Estamos a ver um cubo e... (silencio). (Aparenta estar a procura de algo). (S1I:479, 480)

R: Quer construir um cubo? (RI:481)

S1: Yah. (S1I: 482)

R: Precisa dum lápis? (RI:483)

S1: Não, tenho, obrigado, já encontrei. Talvez assim possa ter uma ideia (algo imperceptível). Então esta base tem um segmento que parte daqui até este ponto que é o segmento BH, tem um segmento aqui mais ou menos assim (silencio). Bom, aqui vem o segmento para aqui, aqui vem o segmento para aqui, então deste lado também virado para baixo eh... há-de vir um segmento deste ponto para este, deste ponto para este, a base é esta. Este ponto que parte daqui, mais ou menos como está isto, (silencio). Então esta base daqui passa para aqui, este ponto vem para aqui, este ponto vem para aqui. Fica uma pirâmide, eu viro, eu viro, tenho este ponto para o outro, este ponto... (silencio). Aqui estou a ver que, estes pontos que partem.... (silencio) estão a dividir... (algo imperceptível), (silencio). Então fica aqui... (silencio). Estes triangulos pequenos (algo imperceptível). (S1I: 484-494)

R: Continue. (RI:495)

S1: Até aqui, estes triângulos pequenos que juntados (rindo-se), tirando os triangulares que juntados formam uma pirâmide, ai meu Deus... (silencio). (S1I: 496, 497)

R: Yah, eu creio que é um caminho, não é, que usou... (RI:498)

S1: Yah. (S1I: 499)

R: Só que é preciso demonstrar que os tais espaços vazios vão constituir uma pirâmide. (RI:500)

S1: (Rindo-se). (S1I: 501)

R: Mas é possível que também haja mais um caminho que é mais explícito. Agora é preciso descobrir onde encontrar... (RI:502, 503) [*But it's possible that there will be another clearer strategy. Now the issue is to find it.*]

S1: Os outros caminhos... Partindo de princípio que já existe um triangu... uma pirâmide. (S1I: 504)

R: Yah, que nós já tínhamos mostrado. (RI:505)

S1: Yah, já tínhamos uma, uma pirâmide. E temos que fazer congruência na base desta pirâmide que já existe. Aquela pirâmide. (S1I: 506, 507)

R: Yah. (RI:508)

S1: Caberá no cubo mais alguma pirâmide congruente a ABCDH? Se sim apresente-as. (S1I: 509)

R: Assim o sr primeiro... (RI:510)

S1: Eu defendi que existiam mais du... mais duas pirâmides. Partindo do princípio do volume da pirâmide partindo do volume do... do volume cubo. Eu sustento que existe. (S1I: 511, 512)

R: Mais alguma coisa sobre este exercício? Podemos continuar? (RI:513)

S1: (Silêncio). Bem, vou parar aqui (rindo-se). Vamos ficar aqui. (S1I: 514)

R: Yah, ok. (RI:515)

S1: Vamos ficar aqui. Não estou a conseguir. Vamos ficar aqui. (S1I: 516)

.....

Student 3

S3: É possível. Por exemplo, nós temos um cubo. Um cubo é formado por seis faces. São seis faces. Então a base estará numa das faces. A base da pirâmide dada estará numa das faces. E esta face aqui e a base estão numa destas faces e o vértice está num ponto que nem um ponto médio doutra face, da face oposta. Tá numa... num dos vértices. Então, se este está num dos vértices, num dos vértices, é lógico, é lógico também que pode surgir uma outra pirâmide, mas já no vértice oposto, que também coincide o vértice com... o vértice estará... o vértice desta pirâmide estará num dos vértices do... irá coincidir com um dos vértices da base. (S3I:283-290)

R: Quantas pirâmides cabem neste cubo? (RI:291)

S3: Só podem caber duas pirâmides, onde terão uma aresta em comum. (S3I:292)

R: Porque afirma dessa maneira de que só caberão duas pirâmides? Não poderão caber mais? (RI:293, 294)

S3: Só duas pirâmides podem caber, porque por exemplo temos aqui um cubo. (S3I:295)

R: Continue. (RI:296)

S3: Temos aqui um cubo.(Silêncio). A base, a base por exemplo está nesta face aqui. E o outro vértice (**o vértice da pirâmide de convergência das respectivas arestas**) está num dos vértices da base oposta. É mais ou menos isso. Então, então pergunta se pode ou não haver uma outra pirâmide. Haverá uma outra pirâmide, porque esta pirâmide aqui ocupa, como é que eu vou dizer, não pode ser a metade, mas ocupa... há uma parte como por exemplo se formos a fazer, eh na parte lateral, se formos a ver esta figura na parte lateral em relação a pirâmide veremos uma coisa mais ou menos assim do cubo. Se formos a ver o cubo na forma lateral havemos de ver o cubo assim e a pirâmide estar assim. A pirâmide estará em forma duma diagonal. Então se é possível construir uma outra pirâmide a ocupar a metade do quadrado desta face, da face do cubo, eu acho que pode sair uma... uma outra pirâmide que há-de ocupar a outra metade. (S3I:297-308)

R: Então com isso quer dizer o que é? Quantas pirâmides podem caber no cubo? (RI:309)

S3: São duas. (S3I:310)

R: São duas. Quais são? (RI:311)

S3: São... são essas duas aqui, que ficam por exemplo... (silêncio). Se cabe a pirâmide ABCDH (**a pirâmide dada no exercício**) acho que a outra pirâmide será EFGHB. Pode caber uma outra pirâmide. (S3I:312-314)

.....

R: Não há uma outra que é possível encaixar aí para além dessas duas? (RI:315)

S3: Que... que não se cruzam? (S3I:316)

R: Sim. (RI:317)

S3: Não, acho que não. (Silêncio). Vou ver... vamos construir uma outra por ex. fica CDHGB, vai intersectar uma... uma das pirâmides. (S3I:318, 319)

R: Bem, vamos lá ver se as duas se intersectam. ABCDH é a pirâmide que é dada, né? Depois temos EFGHB cujo vértice está no B. São essas que se cruzam, né? Aliás não se... (RI:320, 321)

S3: Só tem uma aresta em comum. (S3I:322)

R: Qual é essa aresta? (RI:323)

S3: É BH. (S3I:324)

R: Mas agora, será que essas duas pirâmides ocupam todo o espaço do cubo ou há um espaço que resta. O que é que acha? (RI:325, 326)

S3: Há um espaço que resta. Como por ex. esta parte aqui (silencio) AFE. (S3I:327)

R: Então significa que há uma parte que resta. Juntando essas partes não podem constituir uma pirâmide? (RI:328, 329)

S3: Pode constituir uma pirâmide. Só que uma pirâmide é um sólido. Por ex. resta esta parte aqui. E pode aparecer uma outra parte aqui. Só que já não é... as partes juntadas das partes que restam não é já não vai sair um sólido. Pode sair um sólido, mas sabendo que um sólido tem que ser uma figura geométrica em que esteja tudo junto. Como por exemplo, o caso deste sólido aqui **(pegando um dos artefactos de sólidos geométricos que estavam na secretária do gabinete)** se estiver dividido uma parte aqui uma parte ali, uma parte ali, já não será um sólido. Não sei se percebi bem a questão ou não percebi bem a questão. (S3I:330-337)

R: O que estamos a ver aqui as duas pirâmides não ocupam todo o espaço. Então, o que acha cabe mais uma outra pirâmide? (RI:338, 339)

S3: (Silencio). (S3I:340)

R: Está a pensar em quê? (RI:341)

S3: Estava a pensar por ex nesta parte aqui. Sai uma figura assim que vem mais ou menos até este ponto. Não sei se chega a ser uma pirâmide. (S3I:342, 343)

R: Mas é um espaço, não é uma parte superficial (relativo a face do cubo). (RI:344)

S3: Sim é um espaço. (S3I:345)

R: Talvez se escolher uma outra pirâmide que possa ocupar esse espaço. Em vez de escolher esta pirâmide uma outra talvez. (RI:346, 347)

S3: Esta parte aqui que sobra nem chega a ser uma parte, chega a ser uma... uma recta. **(A imaginação do aluno sobre a parte sobrança é linear, antes tínhamos falado que era um espaço e não uma superfície)**. (S3I:348-350)

R: Não percebi. Qual? (RI:351)

S3: Esta parte aqui que sobra, né? Chega a ser uma parte... eh como é que é? Uma recta. Ya, chega a ser uma recta. (S3I:352, 353)

R: Talvez se desenhasse aqui mais uma vez. (RI:354)

S3: Desenhar o cubo? (S3I:355)

R: Não, aquilo que quer defender. Porque está a dizer que... (RI:356)

S3: (Silencio). Há uma parte... sobra esta parte aqui. (Silencio). O problema é esta parte aqui que sobra, esta aqui. Há este espaço aqui. (Silencio). (S3I:357, 358)

R: Vamos ver. Primeiro vamos talvez considerar uma outra face. Em vez de considerarmos esta pirâmide, considerarmos uma outra cuja face seja por ex. esta aqui. Vamos supôr esta face ABFE. Pode construir uma pirâmide com a face ABFE? (RI:359-361)

S3: Esquecendo o que estava a fazer? (S3I:362)

R: Portanto, deixando esta pirâmide que fez, não é? Vimos com essa pirâmide que fez não podemos visualizar as outras que aparecem. Então, vamos considerar por ex a face EADH. Como podemos ter... (RI:363-365)

S3: Que não intersecta a pirâmide dada? (S3I:366)

R: Sim, são pirâmides que se encaixam no cubo mas não colidem. Pode verificar se... (RI:367)

S3: (Tentando em silêncio usando a face ABFE). (S3I:368)

R: Não, o vértice em H não em D. (RI:369)

S3: Não estou a perceber. (S3I:370)

R: Ser a base da pirâmide, né? ABFE ou AEFB e o vértice em H. (RI:371)

S3: AEFB... (Tentando construir a pirâmide). (S3I:372)

R: Que tal essa pirâmide... O que acha? (RI:373)

S3: É possível. (S3I:374)

R: É possível o que é? (RI:375)

S3: É possível obter uma outra pirâmide que não intersecta. Uma outra pirâmide que não intersecta. (S3I:376, 377)

R: Qual é a posição relativa entre as pirâmides? (RI:378)

S3: Tem a mesma face. (S3I:379)

R: Qual é a face? (RI:380)

S3: ABH. (S3I:381)

R: Quantas pirâmides couberam até agora? (RI:382)

S3: Duas, duas pirâmides. (S3I:383)

R: Qual é o espaço que resta? (RI:384)

S3: (Silêncio). Esta parte aqui... temos esta outra pirâmide FBCG e o vértice em H. (S3I:385)

R: Essas pirâmides não colidem? (RI:386)

S3: Não, não. (S3I:387)

R: O espaço do cubo tá todo ocupado ou não? Ou resta mais alguma coisa? (RI:388)

S3: Resta uma partinha. (S3I:389)

R: Resta uma partinha... (RI:390)

S3: (Refletindo em silêncio). Não, não resta nada. (S3I:391)

R: Não resta nada. (RI:392)

S3: Nada. (S3I:393)

R: Então quantas pirâmides podemos encontrar? (RI:394)

S3: Três. (S3I:395)

R: Três pirâmides. São congruentes às tais pirâmides? (RI:396)

S3: Não. (S3I:397)

R: Não são congruentes? (RI:398)

S3: São congru...entes. (S3I:399)

R: Porque são congruentes? (RI:400)

S3: Por causa do cubo. (S3I:401)

R: Por se tratar dum cubo? (RI:402)

S3: Por causa dum cubo e o vértice está no mesmo... e o vértice das pirâmides é um ponto comum (refere-se ao ponto H). (S3I:403, 404)

R: Agora, quais são as pirâmides que descobriu que são congruentes a pirâmide dada e diz que encaixam bem e ocupam todo o espaço? (RI:405, 406)

S3: EABFH. (Silêncio). (S3I:407)

R: E depois? (RI:408)

S3: FBCGH. (S3I:409)

R: Qual é o princípio que pode ver aí porque as pirâmides se encaixam? (RI:410)

S3: Convergem para um ponto comum. (Silêncio). (S3I:411)

R: E mais o que é? (RI:412)

S3: Convergem para um ponto comum. (Silencio). E as arestas... e têm algumas arestas comuns também. Tem o caso da aresta BH, que é comum para as três... para as três pirâmides. (Silencio). (S3I:413-415)

R: E chegou a dar a fórmula do volume duma pirâmide e dum cubo? (RI:416)

S3: A fórmula do volume? Sim. (S3I:417)

R: Qual é a fórmula do volume dum cubo? (RI:418)

S3: O volume do cubo é igual a área da base vezes altura. O volume do cubo será aresta ao cubo. (S3I:419, 420)

R: E o volume da pirâmide? (RI:421)

S3: O volume da pirâmide é... área da base vezes neste caso a aresta é a altura sobre dois. (S3I:422, 423)

R: Qual é a comparação que faz entre o volume do cubo e o volume da pirâmide? (RI:424)

S3: A comparação é que também esta forma aqui é o volume é igual a área da base... a área da base vezes altura, e na pirâmide é dividindo por dois. (S3I:425, 426)

R: Então quantas vezes a pirâmide cabe no cubo? (RI:427)

S3: Duas. (S3I:428)

R: E aqui qual foi a conclusão que tiramos na forma geométrica? (RI:429)

S3: Couberam três. (S3I:430)

R: Então há contradição? (RI:431)

S3: Há contradição! Acho que a contradição que há aqui é o volume desta... desta... o volume da pirâmide dada é igual a soma do volume das duas pirâmides. Acho que as duas pirâmides que apanhámos agora, a soma deles vai dar o volume desta pirâmide (dada). (S3I:432-434)

R: Estás a dizer que as pirâmides não são congruentes entre si. (RI:435)

S3: Não. (S3I:436)

R: Então, não são congruentes. Porque não são congruentes? Primeiro disse que eram congruentes. Eram as três congruentes e agora diz que não. (RI:437, 438)

S3: Desculpe, são congruentes, são congruentes. (S3I:439)

R: São. As três pirâmides são congruentes. E o volume será o mesmo? (RI:440)

S3: Será o mesmo. (S3I:441)

R: Agora porque há contradição com as fórmulas? (RI:442)

S3: Acho que há contradição com as fórmulas porque esta forma achei mais fácil quando o vértice da pirâmide está no meio da face oposta a área da base da pirâmide. Nesse caso acho se fizéssemos uma figura assim... a área da base fosse esta e o vértice da pirâmide estivesse aqui no meio acho que teríamos esta fórmula. (S3I:443-.446)

R: Que fórmula? (RI:447)

S3: O volume é igual a área da base vezes altura sobre dois. (S3I:448)

R: Então esta fórmula do volume da pirâmide só funciona quando o vértice está no meio da face e não funciona para todos os casos? (RI:449, 450)

S3: Não. Porque se funcionasse não haveria nenhuma contradição aqui. (S3I:451)

R: Mas como aprenderam na escola a fórmula do volume duma pirâmide? (RI:452)

S3: Foi assim mesmo que aprendemos. Mas foi há muito tempo. (S3I:453)

R: Aqui em vez de dois não era três? (RI:454)

S3: (Silencio). Acho que era dois. Não me recordo, mas acho que era dois. (S3I:455)

R: Se tivéssemos aqui três acho que haveria... (RI:456)

S3: Sim, se tivéssemos três aqui haveria uma... concordância. (S3I:457)

R: Podemos pôr três? (RI:458)

S3: Podemos (rindo-se). (S3I:459)

R: É melhor rever a fórmula do volume da pirâmide para ver o que é que deram. Mais alguma coisa em relação a este exercício 3? (RI:460, 461)

S3: Eu queria... eu queria um esclarecimento é dois ou três? (S3I:462)

R: Eu só queria saber quais são os seus conhecimentos, né? O professor é que lhe vai explicar se é dois ou três ou pode investigar nos livros. Mas qual foi a conclusão deste exercício? (RI:463- 465)

S3: Tá ok. Tá muito lindo. (S3I:466)

.....

Student 4

S4: Nº 3 não sei se eu fiz. Então... o exercício nº 3 é uma questão bem feita e complicadíssima se fosse para avaliação a minha nota seria nula (rindo-se). São questões geométricas e eu creio que eh... eu reconheço, eu... em geometria não... não sou bom. Não sei porquê. Também porque não tenho explorado muito bem a área geométrica, porque talvez não tenha tido docentes que fizessem com que o estudante sentisse prazer em geometria, porque contribui... Eu tenho uma aproximação para outras áreas principalmente para álgebra, porque eu tive professores que incentivavam e sempre quiseram mostrar como a álgebra era. Em geometria o professor sempre dava um bocadinho e passávamos, né? Daí que não tenho uma grande afinidade com a geometria. Eu reconheço. E a capacidade de abstracção não é boa porque é uma área que não foi bem explorada. Mas quanto a este exercício eu disse que... a pergunta diz: caberá no cubo, no cubo mais alguma pirâmide... (S4I:347-358)

R: Pode ler o exercício desde o princípio para ter a ideia global? (RI:359)

S4: (Lê o enunciado desde o princípio). Bem eu apresentei alguns cubos (pirâmides) possíveis (**representação algébrica**). Se deve ser congruente certamente que deve ter a mesma forma e tamanho. (S4I:360-362)

R: Pode ler como resolveu o exercício nº 3? (RI:363)

S4: Sim, além da pirâmide já apresentada dentro do cubo é possível obter mais três pirâmides que são: AB, não é, ABEF... ABE..., AB... onde é que está? ABEF, não é, C, quer dizer que seria uma pirâmide, não é, uma pirâmide com base em ABEF e com o centro em C. (S4I:364-367)

R: Continue. (RI:368)

S4: E a outra AB... ABCD e com outra congruente a esta, mas com o centro, com o vértice em C [E]. (S4I:369-370)

R: Continue. (RI:371)

S4: Teria outra que é EFGH, não é, mas com o centro em B. Quer dizer seriam eh, uma com vértice para este lado, com a base mas com o vértice neste lado e a outra com a base mas com o vértice no outro lado quer dizer eu acredito... foi essa a minha capacidade de abstracção. Quer dizer no máximo só poderiam caber nesse cubo congruente com a pirâmide original no máximo quatro. (S4I:372-376)

R: Essas pirâmides não se chocam, não colidem? (RI:377)

S4: Bem, talvez dada a sua forma geométrica, não é, assim contornado, eu creio, no máximo... porque ao apresentarmos... existe este, está claro, que não pode existir nenhuma perpendicular a esta. Porque o que está acontecer, eu não cheguei a analisar exactamente. O que estou a ver é em termos materiais. Suponhamos que este cubo fosse um tanque por ex. com água, não é, um tanque com água. Eu meto lá dentro eh... um objecto mas com a forma, não é, com a forma desta... desta pirâmide, não é, com a forma desta pirâmide. Então, se é um objecto eh... vai ocupar uma parte, não é? O que está a acontecer aqui, o facto desta pirâmide estar assim proíbe a existência duma outra

a perfurar. Então, no máximo só poderá existir uma outra que se encaixa e não deixa espaço aqui no meio que seria um aqui, mas com a mesma base, mas que só vai encostar, completá-la. Seria algo mas ou menos assim. (S4I:378-388)

R: Então, quantas pirâmides podem caber aqui? (RI:389)

S4: No máximo mais uma. (S4I:390)

R: E como é que fica (apontando na resposta escrita do estudante)? (RI:391)

S4: Eu retiro, eu retiro, eu retiro. Porque se é que, se é que caberá mais alguma pirâmide congruente a ABCDH, a resposta é sim. Quer dizer a condição, a condição se é que não devem se chocar, então tem que ser uma. (S4I:392-394)

R: É para ocupar o espaço do cubo numa forma... (RI:395)

S4: De tal forma que não sobre nada. (S4I:396)

R: Ya, que ocupe todo o espaço. (RI:397)

S4: Sim. (S4I:398)

R: Então quantas pirâmides cabem aí? (RI:399)

S4: Porque se esta existe... ocupou o espaço desta forma... não, eu mantenho a minha primeira ideia. (S4I:400, 401)

R: Qual? (RI:402)

S4: A de três pirâmides. (S4I:403)

R: Então no total seriam... (RI:404)

S4: Incluindo com essa seriam quatro. (S4I:405)

R: O sr quer dizer que quatro pirâmides podem caber dentro dum cubo sem se chocar e ocupar o espaço todo. (RI:406, 407)

S4: Porque esta pirâmide deixa um espaço aqui. Deixa outro aqui. Deixa outro aqui. Talvez eu não esteja sabendo apresentar em termos de letras exactas. Mas este cubo sempre deixa... nesta aresta que parte daqui deixa um espaço aqui e nesta aresta que parte daqui deixa um espaço aqui. E são espaços que precisam de ser... fechados. Não sei como em termos de apresentação, talvez eu não soubesse apresentar em termos de letras, não é, dizer que são assim, mas existem, mas existem... a questão é que existem esses espaços, existem esses espaços aqui, ao inclinar ela vai deixar um espaço do lado em que ela parte, vai deixar um espaço aqui. Do outro lado em que ela parte deixa um espaço também. Em cada aresta ela deixa uma parte. E é uma parte que deve ser ocupada de tal forma que o cubo esteja totalmente coberto. (S4I:408-417)

R: Segundo a sua ideia esse espaço que existe é ocupada com quantas pirâmides? (RI:418)

S4: Três. (S4I:419)

R: Três. (RI:420)

S4: Que seria uma aresta, esta parte, porque o nosso cubo é este, deixa um espaço aqui nesta aresta. (S4I:421, 422)

R: Como esse espaço pode ser representado como uma pirâmide? Já que disse que podem caber mais três de maneira a não se chocarem e ocuparem todo espaço. Porque o sr escolheu estas pirâmides. Será que satisfazem essa condição? (RI:423-425)

S4: Não, não. Essas pirâmides não satisfazem essa condição por um simples motivo. Se eu escolhi esta base e existe esta assim... então escolhia esta com o centro aqui... seria direccionar esta a este centro, esta a este centro... umh... (S4I:426-428).

R: Pode desenhar aqui? (RI:429)

S4: Sim. É uma questão de visualizar melhor. (Começa a construir e a falar baixinho.) (S4I:430).

R: Tá a construir o cubo, não é? (RI:431)

S4: Sim. (Construindo o cubo e as pirâmides). (S4I:432)

R: Tá a construir uma pirâmide. Qual é a base e qual é o vértice? (RI:433)

S4: O vértice é este e a base é esta, não é? (Referindo-se a pirâmide ABFEG pela figura que construiu no papel fornecido). Atendendo e considerando que a outra base que foi ocupada é esta toda (referindo-se a base da pirâmide original ABCD). E esta pirâmide (ABFEG) ao chegar aqui só toca aqui tangencialmente. E ela tá inclinada assim, não é? Tá inclinada, então esta (ABFEG) só toca assim, tangencialmente, eh... sim, tangencialmente toca (silêncio), eu creio que são congruentes. Ia, esta termina aqui, e no mesmo sítio onde esta termina é um vértice da outra pirâmide (o vértice G). Pensando bem, em termos de análise eu acho mesmo que termina por aqui. (S4I:434-441).

R: Então, quantas pirâmides cabem aí dentro? (RI:442)

S4: Em termos... (rindo-se) uma. Não cabem mais. (S4I:443)

R: E o total das pirâmides? (RI:444)

S4: Duas, duas. (S4I:445)

.....
R: O sr conhece as fórmulas do volume da pirâmide e do cubo? (RI:446)

S4: Não me recordo bem, mas acho que a^3 para o cubo, aresta ao cubo, ah... da pirâmide... o volume da pirâmide... o volume da pirâmide... ah... o volume da pirâmide... acho que é, não sei, acho que é a área da base ah... vezes altura... não tou... sobre dois. Acho que esta é a fórmula da pirâmide. Não tou seguro... mas desta eu tenho certeza (referindo-se a do cubo). (S4I:447-451)

R: A fórmula da pirâmide... (RI:452)

S4: Eu acho que é esta mas não tenho a certeza. (S4I:453)

R: Mas chegaram a dar esta fórmula? (RI:454)

S4: Já demos, já demos de certeza. (S4I:455)

R: Não seria aqui sobre três? (RI:456)

S4: Sobre três, sobre três, sobre três... (pensativo). Ia, só que eu tou a ver uma fórmula com sobre três e outra sobre dois. Só que não tou ... só que eu sei que... há uma fórmula sobre dois. No triângulo é sobre dois (**memória fraca**). Mas não sei, mas... não sei. Não sei, mas é credível.

R: Porque é credível? (RI:461)

S4: Por um simples motivo na... na... ah... numa, numa dedução da... da... do volume da pirâmide que eu vi num manual vinha lá uma especificação sobre três, mas eu creio que esse manual fala disso mesmo. É credível. Talvez eu esteja a confundir. Só que não acredito muito que esse dois seja do volume da pirâmide, acho que é do triângulo, da fórmula do triângulo, não da... pirâmide. (**Uma pista abriu mais horizontes**). Eu creio que para volumes do cubo, da pirâmide, eh... do cone, de... de... e da pirâmide eu penso que é sobre três mesmo. (S4I:462-468)

R: Agora vamos supôr que é sobre três. Como é que pode relacionar os dois volumes? (RI:469)

S4: Como é que pode relacionar os dois volumes! Eh... atendendo e considerando que são... bem, se eu digo a área da base, então eu me refiro a esta base. E esta base é formada por uma aresta, não é? Eh... se eu... se eu... se eu considerar, se eu considerar que são duas pirâmides que estão aqui dentro, não é? (S4I:470-473)

R: Continue. (RI:474)

S4: Se eu considerar que são duas pirâmides, então eu diria, duas vezes o volume da pirâmide é igual ao volume do cubo. Se eu considerar que são duas. Porque seria para somar o volume de... de... de... daquilo ali do cubo, teria que somar os volumes que cada um ocupa para somar ao volume do cubo. Então, eh... se eu for nessa, nessa ordem de ideias então teria que substituir aqui pela respectiva expressão e aqui pela respectiva expressão, se eu considerar que são duas. Agora, se eu for a considerar que é apenas um... um cubo (**pirâmide**), não é, e querer relacionar, porque não tenho a certeza

se é exactamente um, mas eu acho que no máximo é um(**a**). No máximo são dois (**duas**), aliás, porque já existe um (**uma**). No máximo são dois (**duas**). Se considerar que são dois (**duas**), então eu teria esta alternativa que seria duas vezes a área da base, altura sobre três igual a a^3 . ($\frac{2A_b h}{3} = a^3$). Mas aqui existe uma outra particularidade que se verifica. É que a altura é igual a aresta, a altura de cada cubo, uma vez que a altura é perpendicular a base. Se a altura é perpendicular a base no máximo só pode ser igual a aresta. Se é igual a aresta então teria duas vezes área da base vezes a sobre três igual a a ao cubo. Mas a área da base também é um... é um quadrado. Então seria dois vezes a ao quadrado vezes a sobre três igual... igual... igual a a ao cubo. Isto seria dois a ao cubo sobre três igual a a ao cubo. Então, eh... seria dois a ao cubo igual a três a ao cubo. Isto também não me ajuda muito. (S4I:475-491)

R: Porque? (RI:492)

S4: Eh... porque o que vou ter será aresta nula. (S4I:493)

R: Nula porque? (RI:494)

S4: Por um simples motivo. Se eu disser três a ao cubo menos dois a ao cubo são polinómios do mesmo grau, podem-se subtrair, então seria a ao quadrado igual a zero. (S4I:495, 496)

R: E a outra solução? (RI:497)

S4: É que todas são as mesmas. Mais ou menos zero, então isso é zero. E este resultado não me estimula, não me estimula muito (rindo-se). Talvez eu esteja a cometer algum erro. Mas eu tenho quase a certeza de que a altura é igual. (S4I:498-500)

R: Vamos partir das fórmulas, o sr partiu da figura e diz que o volume do cubo é duas vezes o volume da pirâmide. (RI:501, 502)

S4: Sim. (S4I:503)

R: Agora a partir destas fórmulas, o volume do cubo e o volume da pirâmide. A partir daqui vamos relacionar as duas fórmulas. (RI:504-505)

S4: Há uma coisa que preciso perceber. Ao relacionar isto eu tenho que considerar exactamente uma pirâmide inscrita aqui dentro? (S4I:506, 507)

R: Esta pirâmide. (RI:508)

S4: Esta pirâmide. Ok, tá bom. Eh... atendendo e considerando pelo menos algo em que estou seguro é que a base é... é... um cubo não é? É um quadrado. Então, vou dizer que a área da base é a aresta ao quadrado. Então, eh... sendo aresta, vezes aresta, então teria aqui o volume da pirâmide é a ao quadrado sobre três, não é? Eh... então se eu considerar, se eu considerar essas duas expressões para as poder relacionar, eh... teria o que é? Teria o volume da pirâmide, o volume da pirâmide seria... podia ter três vezes o volume da pirâmide igual a a ao cubo vezes aresta. A aresta ao quadrado seria mais ou menos igual a quê? Tenho que relacionar o volume da pirâmide (VP) com o volume do cubo (VC). Então seria o mesmo que ter o que é? Três vezes o VP eh... sobre a altura da pirâmide. Então teria ainda eh... posso muito bem dizer que Eu

posso ainda calcular a raiz, que seria $a = \sqrt{\frac{3VP}{h}}$. Então de acordo com esta expressão

posso vir substituir aqui. Então o volume VP é da pirâmide. Então este é do cubo (referindo-se ao VC). VC seria a ao cubo. Então $a = \sqrt{\frac{3VP}{h}}$, isto é $a = \pm \sqrt{\frac{3VP}{h}}$. Então

eleva-se esta expressão ao cubo. Esta expressão seria... teria... mais ou menos o que é? (Seguem-se as seguintes transformações algébricas):

$$VC = \left(\pm \sqrt{\frac{3VP}{h}} \right)^3 = \pm \sqrt{\left(\frac{3VP}{h} \right)^3} = \sqrt{\left(\frac{3VP}{h} \right)^2} \cdot \sqrt{\frac{3VP}{h}} = \frac{3VP}{h} \cdot \sqrt{\frac{3VP}{h}} \quad (S4I:509-524)$$

S4: A relação que existe é três vezes, não é, ao VP, três vezes ao VP. Embora não seja uma relação concisa, uma vez que eu tenho aqui uma raiz, em termos de expressões talvez seja esta. Mais ou menos o cubo, não é?... **(Aparentava estar confuso após essas transformações algébricas).** (S4I:526-529)

.....
R: Mas porque é que aqui por ex. onde está altura... a altura pode ser substituída com o que é? (RI:530, 531)

S4: A altura? (S4I:532)

R: A altura da pirâmide. (RI:533)

S4: Ahhh... aresta. (S4I:534)

R: Então acho que para poder ter menos variáveis poderia pôr no h e a partir daqui... (RI:535)

S4: A partir donde? (S4I:536)

R: Desta relação (referindo-se a $3VP = a^2 \cdot h$). (RI:537)

S4: Três VP é igual a a ao cubo vezes a . Então teria três VP igual a a ao cubo. (S4I:538)

R: O que é a ao cubo? (RI:539)

S4: Três VP seria a mesma coisa que tivesse o próprio cubo. (S4I:540)

R: Então qual é a relação? (RI:541)

S4: Então o VC é a soma de VP, V P e VP, que são as três pirâmides. (Ele escreve $VC = VP + VP + VP$). (S4I:542, 543)

R: Então quantas pirâmides podem caber aí? (RI:544)

S4: Se já existe uma, então são duas. (S4I:545)

R: E qual é a sua conclusão? (RI:546)

S4: É que podem caber apenas mais duas (rindo-se). (S4I:547)

.....
R: Então porque mudou de ideias? Primeiro disse que eram quatro. Depois passou para... (RI:548)

S4: Uma pirâmide. Através dessa dedução sistemática que faz sentido... (S4I:549)

R: Porque faz sentido? (RI:550)

S4: Faz sentido porque a altura de facto é igual a aresta. A dedução mostra também outra coisa aqui. O VC é três vezes o VP. Se é três vezes o VP quer dizer que são três pirâmides que estão lá dentro. Isto é uma demonstração clara e óbvia científica. (S4I:551-553)

R: Agora como representar as três pirâmides aqui? O sr conseguiu representar uma e temos a dada e onde é que vai ficar a outra? (RI:554, 555)

S4: (Reflectindo). Esta é a dada e tenho esta... alguns espaços sobram. (S4I:556)

R: Já encontrou a terceira pirâmide? (RI:557)

S4: A terceira ainda não, mas eu creio que a terceira...(silêncio) só poderá ser aqui com centro em (silêncio) G. Teria como base esta, não é? (S4I:558, 559)

R: Continue. (RI:560)

S4: Teria como base ABEF e com o centro em G. Não pode ser aqui porque poderia intersectar. É isto mesmo. (S4I:561-562)

R: E ela não colide em nenhuma delas? (RI:563)

S4: Eu creio está tangencialmente, não em termos de colisão. Eu creio tocam-se apenas. (S4I:564)

R: Vamos lá ver a primeira. Qual é? A dada já temos aí. (RI:565)

S4: A segunda, a segunda é esta, é esta. Tem esta base e tem o centro aqui. (S4I:566)

R: Esta não colide com a primeira? (RI:567)

S4: Esta segunda? (S4I:568)

R: Esta segunda. (RI:569)

S4: Não! Toca tangencialmente. (S4I:570)

R: Onde é que toca? (RI:571)

S4: Mais ou menos nestas arestas, nestas linhas. Não colide, toca. Porque ela está mais encostada. A outra deixa um espaço. E a outra passa por cima do espaço. (S4I:572, 573)

R: E a terceira? (RI:574)

S4: E a terceira é esta. É esta. Tem este centro. As duas... as duas não chegam a preencher um espaço. Deixam um espaço. Esta deixam um espaço aqui e esta um espaço ali. É a minha opinião (rindo-se). (S4I:575-577)

R: Ia, o que nós queremos é só explorar certas questões. E o que achou sobre este exercício? (RI:578, 579)

S4: Bem, este exercício é certamente em termos de abstracção não é fácil, não é fácil e provavelmente para pensar, sem pensar nas próprias expressões matemáticas, não é fácil. Eu creio que é muito fácil se enganar pensar sem nenhum suporte em termos de cálculo. Se formos a notar deixa-se um espaço aqui, deixa-se um espaço aqui, deixa-se um espaço, naturalmente que se pode pensar que existe em cada espaço pelo menos uma unidade de um cubo para preencher. Mas o que se verifica é que em termos de cálculo no máximo só podem caber três. Quer dizer sem a primeira abstracção ao fazer este teste diagnóstico deveríamos ter certamente uma imaginação, ser capaz de imaginar, mas com base em suportes científicos. **(Álgebra ajuda geometria)**. (S4I:580-588)

R: O que são suportes científicos para si? (RI:589)

S4: Não basta só pensar é preciso ter algum propósito, alguma parte científica ou dizer que a relação disto com isto é esta. Por exemplo, é congruente se tiver isto mais isto mais aquilo. Se está contido dentro duma determinada unidade então existe uma relação entre eles. Podemos determinar uma relação entre eles. São esses suportes que na altura não trazia comigo e nem podia imaginar que existiam os tais suportes. **(Carência de conceitos chaves)**. (S4I:590-595)

R: Mas eu estou a ver que aqui o sr trouxe... (RI:596)

S4: Talvez, talvez não soubesse que trazia (rindo-se). (S4I:597)

R: Ao fim ao cabo quem estava a fazer esses cálculos não fui eu. (RI:598)

S4: É a famosa teoria de algumas pessoas de educação que dizem a pessoa nasce sabendo apenas cabe ao educador fazer descobrir o que sabe. Finalmente, acabei descobrindo que podia fazer, não por mérito próprio, claro. Se assim tivesse sido então teria feito na altura que me foi entregue o enunciado. (S4I:597)

.....

Student 5

S5: (Lê o enunciado). Eu aqui eu vi que esta pirâmide está sobre a base, esta base aqui. Eu fiquei a...a... contar as faces do cubo. (S5I:257, 258)

R: Continue. (RI:259)

S5: Então eu vi em cada uma das faces podia estar assente um cubo (pirâmide). Por ex nesta face podia estar assente um cubo. Iria ser a base. Desculpe não cubo a pirâmide. Podia ser a base da pirâmide. A outra face iria ser também a base da pirâmide. Cada uma das faces podia ser a base duma pirâmide. **(O problema não foi entendido pelo estudante, devido ao enunciado?)**

R: Quantas pirâmides? (RI:265)

S5: (Conta as faces e conclui que são 8). Ah, são 8 (rindo-se).
R: São 8 quê? (RI:267)
S5: São 8 faces. Então tirando a original ficamos com 7. (S5I:268)
R: Um cubo tem 8 faces? (RI:269)
S5: (Silencio). (S5I:270)
R: Vamos contar outra vez. (RI:271)
S5: Talvez. (S5I:272)
R: Mostre me quais são as faces do cubo. (RI:273))
S5: Por ex BCGF. (S5I:274)
R: Uma face. (RI:275)
S5: BAEF. (S5I:276)
R: Duas faces. (RI:277)
S5: Esta de cima EFGH. (S5I:278)
: Terceira face. (RI:279)
S5: CDHG. (S5I:280)
R: Outra. (RI:281)
S5: Posso ter ABCD. (S5I:282)
R: Outra face. (RI:283)
S5: Não sei se contei ADHE. (S5I:284)
R: Ainda não. Então quantas são? (RI:285)
S5: São... são 6 faces. (S5I:286)
R: Então 8 apareceu donde? (RI:287)
S5: (Silencio). (S5I:288)
R: Em cada face quantas pirâmide construí? (RI:289)
S5: Em cada face uma pirâmide. Em cada face pode-se construir a base duma pirâmide. (S5I:290)
R: Quantas pirâmides pode-se construir sobre uma face? (RI:291)
S5: Uma. (S5I:292)
R: E o que se segue? (RI:293)
S5: (Começou a contar o nº de faces). Porque eu... eu, quer dizer, tive em conta por ex este lado (base) aqui... ABCD. Este aqui substitui a base desta pirâmide aqui.
R: Continue. (RI:296)
S5: Então significa que em cada uma das faces pode servir de base. (S5I:297)
R: Continue. (RI:298)
S5: Pode servir de base. (S5I:299)
R: Mas a questão aqui, queremos saber quantas pirâmides cabem dentro deste cubo. Não é só construção de pirâmides. (RI:300, 301)
S5: Tem a ver portanto uhhh... (S5I:302)
R: É para ocupar o espaço. (RI:303)
S5: Sim, sim. Que não seja... seja ocupada por... por esta pirâmide, mas por uma outra pirâmide. Portanto não pode haver... vamos supôr uma pirâmide cuja base é esta. Portanto significa que este ponto aqui estaria aqui, portanto haveria, haveria coincidência... haveria uma intersecção com este da pirâmide. (S5I:304-307)
R: Mas o objectivo é saber quantas pirâmides congruentes a esta cabem aqui dentro, sem colidir, sem se intersectar. (RI:308, 309)
S5: Ah sim. (S5I:310)
R: Uma forma de encaixar talvez. Quantas pirâmides podem estar lá dentro? (RI:311)
S5: Desta maneira não estou a ver outra possibilidade. (S5I:312)
R: Qual é a dificuldade que tem? (RI:313)

S5: Porque se eu... se eu considerasse esta... esta face aqui como base. Assim para ter este ponto aqui, não havia de haver intersecção... Se eu começasse daqui seria a mesma coisa. (S5I:314, 315)

R: Qual é a sua conclusão? Quantas pirâmides cabem neste cubo? (RI:316)

S5: Havia de caber uma. (S5I:317)

R: Qual? (RI:318)

S5: Esta aqui, esta aqui a original. (S5I:319)

R: E porquê? (RI:320)

S5: Porque tomando qualquer outra face como base duma pirâmide, as pirâmides iriam se intersectar, sempre hão-de se cruzar. (S5I:321, 322)

R: Porque tirou essa conclusão já experimentou todas as pirâmides possíveis? (RI:323)

S5: (Silencio). Não estou a perceber. Porque como é possível construir-se mais uma outra pirâmide que não se intersecte com a original? Não estou a ver. (S5I:324, 325)

.....
R: Mas agora o sr já relacionou o volume da pirâmide com o volume do cubo? (RI:326)

S5: Não. (S5I:327)

R: Conhece as fórmulas? (RI:328)

S5: O volume do cubo é aresta ao cubo. O volume da pirâmide é área da base vezes altura. (S5I:329)

R: O volume da pirâmide é área da base vezes altura? Não se esqueceu dalguma coisa aí na fórmula? (RI:330, 331)

S5: Sobre 3. (S5I:332)

R: Onde é que apareceu esse 3? (RI:333)

S5: (Silencio) (S5I:334)

R: Deram o volume da pirâmide na escola? (RI:335)

S5: O problema é do esquecimento. Posso consultar. (S5I:336)

R: É sobre 3, é sobre 3. Então com base nisso qual é a conclusão que tira? (RI:337)

S5: (Silencio). O volume do cubo é aresta ao cubo. O volume da pirâmide é área da base vezes altura sobre 3. (Silencio). (S5I:338, 339)

R: Qual é a área da base desta pirâmide? (RI:340)

S5: A área da base desta pirâmide é um quadrado. (S5I:341)

R: É um quadrado. Então fica... (RI:342)

S5: Área do quadrado é l^2 . Então fica $VP = \frac{l^2 h}{3}$. (S5I:343)

R: Agora o l corresponde a quê? (RI:344)

S5: A área do quadrado. (S5I:345)

R: Não, o lado l ? (RI:346)

S5: O lado da base? (S5I:347)

R: Corresponde a aresta do cubo. (RI:348)

S5: Do cubo. (S5I:349)

R: Então em vez de usar o l pode usar... (RI:350)

S5: (Pensativo). Aresta... aresta do cubo. Não é o volume do cubo! (S5I:351)

R: Aqui é l^2 . Então como é que fica? (RI:352)

S5: É a^2 . (S5I:353)

R: Então a altura da pirâmide corresponde a quê? (RI:354)

S5: A altura da pirâmide... é igual a medida do lado do quadrado. (S5I:355)

R: Então em vez de h posso pôr... (RI:356)

S5: a . (S5I:357)

R: Então fica... (RI:358)

S5: $VP = \frac{a^3}{3}$. (S5I:359)

R: Então qual é a relação que faz entre o volume do cubo e o da pirâmide? (RI:360)

S5: Significa que o volume da pirâmide é 3 vezes menor que o volume do cubo. (S5I:361)

R: Então quantas pirâmides daquele tipo podem caber no cubo? (RI:362)

S5: 3. (S5I:363)

.....
R: Quais são? Então quantas pirâmides podemos construir? (RI:364)

S5: 3 pirâmides. (S5I:365)

R: Então é possível representar as tais pirâmides no cubo? Já temos uma. E as outras quais seriam? Não devem colidir. (RI:366, 367)

S5: (Silencio) (S5I:368)

R: É possível construir as 3 pirâmides sem colidir através de volumes? (RI:369)

S5: Através de volumes é possível, aliás é uma relação lógica, não é? (Rindo-se). Na observação parece impossível. Mas tenho por ex este... por ex ABFEG. (Silencio). **(Álgebra serviu de ajuda para revelar a solução dum problema geométrico que por indução seria difícil ver)**. (S5I:370-373)

R: Parece haver uma contradição entre a parte algébrica da geométrica, já que disse que algebricamente cabiam 3 pirâmides no cubo, mas não é possível encontrá-las geometricamente. (RI:374-376)

S5: Pode haver contradição, mas eu não... eu não estou a ver, mas a dedução aqui é lógica. Mas não estou a conseguir desenhar. **(Admite a possibilidade de contradição por causa de não conseguir visualizar as pirâmides)**. É complicado (falou baixinho). (S5I:377-379)

R: Não percebi. (RI:380)

S5: É complicado. (Experimentando algumas possibilidades em silencio). (S5I:381)

R: Que face está a considerar e que vértice? (RI:382)

S5: Estou a usar esta face... (S5I:383)

R: Qual face? (RI:384)

S5: FEAB. (S5I:385)

R: FEAB e o vértice... (RI:386)

S5: G. (S5I:387)

R: As pirâmides podem-se encostar mas não podem se perfurar. (RI:388)

S5: Sim. (Experimentando algumas possibilidades porém concluiu que não resultavam). (S5I:389)

R: Em vez de ser o vértice G usa o vértice H mantendo a mesma face. O que acha? (RI:390)

S5: (Silencio). (S5I:391)

R: Pode desenhar a pirâmide. (RI:392)

S5:(Desenhando). (S5I:393)

R: O que acha? Essa pirâmide colide com a original ou não? (RI:394)

S5: Não. (S5I:395)

R: Porque não colide? (RI:396)

S5: (Silencio). Não colide porque este segmento não está a coincidir só está... só está construído do outro lado. **(Explicação não certa. Eu tomei o papel de professor e o aluno apenas aceita a resposta como certa sem ter percebido. Desvantagem do hinting)**. (S5I:395-400)

R: As duas pirâmides estão ligadas por uma face triangular ABH. Não colidem. Procuremos a terceira pirâmide. (RI:401, 402)

S5: Podemos continuar a utilizar o mesmo ponto H. (S5I:403)
R: Porque? (RI:404)
S5: Utilizamos o ponto H mais uma vez porque vimos que a pirâmide ABFEH e a original não colidem, encaixam-se. (S5I:405, 406)
R: Continue. (RI:407)
S5: Então podemos construir a terceira pirâmide usando o mesmo raciocínio. Tendo como método a igualdade. **(O estudante é influenciado por uma resposta correcta para raciocinar da mesma maneira).** (S5I:408-410)
R: E depois como fica? (RI:411)
S5: (Silencio). (S5I:412)
R: Qual é a face que está a sobrar? (RI:413)
S5: (Silencio). É a face ABEH. **(Problemas na visualização).** (S5I:414)
R: Pode encontrar uma pirâmide com essa face como base e com o vértice em H é possível? (RI:415, 416)
S5: (Silencio). Não. (S5I:417)
R: Qual seria uma outra face possível? (RI:418)
S5: (Silencio). (S5I:419)
R: Qual é a face que escolheu? (RI:420)
S5: BCGF. (S5I:421)
R: E que tal essa face? (RI:422)
S5: (Silencio). Eu acho que esta pirâmide também encaixa. (S5I:423)
R: Encaixa porquê? (RI:424)
S5: BCGFH. (S5I:425)
R: Porque é que encaixa? (RI:426)
S5: (Silencio). (S5I:427)
R: Talvez indicar as faces onde se encaixam com as outras. (RI:428)
S5: Eu tenho esta face DCGH com este vértice. E ao mesmo tempo há uma outra pirâmide BAEF têm a mesma base. É uma pirâmide regular. **(Não respondeu a pergunta. Apenas apresenta conhecimentos desconectados).** (S5I:429-431)
: Mas não colidem essas 3 pirâmides? (RI:432)
: Eu penso... isto é só... esta pirâmide com esta face. Esta face... **(Resposta correcta mas não explica o porquê).** (S5I:433, 434)
R: O que é que achou do exercício? (RI:435)
S5: É um exercício interessante. É um exercício mental. O meu problema foi o de não relacionar os volumes. Eu baseiei-me só na figura. Portanto tornou-me difícil. É relacionar os volumes para se fazer. **(Dificuldades usando o método indutivo).** (S5I:436- 438)

.....

Student 7

S7: Sim, caberá mais pirâmides congruentes a esta. Sim caberá e aqui estão algumas pirâmides congruentes. (S7I:191, 192)
R: Quantas pirâmides podem caber no total? (RI:193)
S7: Aqui podem caber... 4. A pirâmide dada é esta, então outras 3. (S7I:194)
R: 4 porquê? (RI:195)
S7: (Silencio longo). Eu acho que neste... neste cubo cabem 3 pirâmides, 4 pirâmides. 3 pirâmides mais esta que está representada. (S7I:196, 197)
R: Porque tirou essa conclusão? (RI:198)
S7: Uma vez que o cubo tem 4 faces. (S7I:199)

R: Continue. (RI:200)

S7: Tem 4 faces. Então cada face constitui uma base duma pirâmide. Cada face constitui uma base duma pirâmide. Tendo isso então só podem existir também 4 pirâmides. Porque cada face... (S7I:201-203)

R: Quantas faces tem um cubo? (RI:204)

S7: 4. (S7I:205)

R: Porquê? (RI:206)

S7: Porquê? (Rindo-se conta as faces do cubo). 6. (S7I:207)

R: Então quantas pirâmides? (RI:208)

S7: 6. 5 ou 6 com esta aqui. (S7I:209)

R: Quantas pirâmides podem caber no cubo sem se intersectarem? (RI:210)

S7: Sem se intersectarem. **(Aparenta que o estudante não tinha compreendido o enunciado)**. (S7I:211, 212)

R: O que significa caber? Ocupar o espaço duma maneira racional. (RI:213)

S7: Sem se intersectarem? As pirâmides? Estas pirâmides intersectam-se porque os segmentos se cruzam entre si e por isso hão de se intersectar em algum sítio. (S7I:214, 215)

R: Será que pode existir pelo menos uma pirâmide que não se intersecta com a outra? Podem se encostar nas faces mas não colidir. (RI:216, 217)

S7: Podem se encostar? (S7I:218)

R: Podem se encostar nas faces. (RI:219)

S7: Podem se encostar nas faces. (S7I:220)

R: Sim, é tipo um puzzle, as peças se encaixam. (RI:221)

S7: (Silêncio longo e partes inaudíveis). (S7I:222)

R: Então na sua opinião eh... (RI:223)

S7: Para não se intersectar caberá apenas uma. (S7I:224)

.....
R: E se formos a falar em termos de volumes. O volume duma pirâmide e o volume dum cubo. Pode relacionar? Quantas vezes o volume duma pirâmide cabe no volume dum cubo? (RI:225- 227)

S7: (Inaudível). (S7I:228)

R: Conhece as fórmulas? (RI:229)

S7: O volume dum quadrado... (S7I:230)

R: O volume de quê? (RI:231)

S7: Dum quadrado. (S7I:232)

R: Dum quadrado? O volume dum quadrado? Qual é o volume dum quadrado? (RI:233)

S7: (Silêncio). (S7I:234)

R: O quadrado tem um volume? Qual? (RI:235)

R: Então, porque é que tem um volume? (RI:237)

S7: A pirâmide tem um volume uma vez que tem a base, tem volume. Agora temos que determinar o volume do quadrado. **(Aparenta não entender o conceito volume)**. (S7I:238, 239)

R: Não o volume do quadrado, estamos a falar do volume do cubo e o volume da pirâmide. (RI:240, 241)

S7: O volume do cubo. (S7I:242)

R: Pois o volume do cubo. (RI:243)

S7: O cubo tem um volume? (S7I:244)

R: Tem, que é a área da base vezes altura. (RI:245)

S7: A área da base vezes altura. Então a área da base é a área do quadrado. E a altura é a face do próprio do cubo, que é igual ao lado do quadrado. **(Aparenta não dominar certos conceitos geométricos).** (S7I:246-248)

R: E a que é igual o volume do cubo? (RI:249)

S7: O volume do cubo é igual lado ao cubo? O volume do cubo é igual lado ao cubo. (S7I:250)

R: E o volume da pirâmide? (RI:251)

S7: O volume da pirâmide também é área da base vezes altura. (Longo silêncio). A área da base que é a área do quadrado. O volume da pirâmide é lado ao quadrado vezes altura... A altura será do cubo? É o lado do quadrado. (S7I:252-254)

R: Continue. (RI:255)

S7: É igual ao lado ao cubo. O volume do cubo é igual ao volume da pirâmide. (S7I:256)

R: Segundo a figura os volumes são iguais? (RI:257)

S7: (Rindo-se). Os cálculos conduziram a isso. (S7I:258)

R: Acha que o volume da pirâmide é igual ao volume do cubo? (RI:259)

S7: Há um problema. **(Interessante que o E não se apercebeu da contradição entre a figura e o resultado algébrico obtido até que foi dito).** (S7I:260, 261)

R: Há um factor que deve multiplicar na fórmula do volume da pirâmide. Que factor é esse? (RI:262, 263)

S7: Não é sobre 3? (S7I:264)

R: É sobre 3. É sobre 3. Recorda-se da fórmula? (RI:265)

S7: (Rindo-se). (S7I:266)

R: Quando é que deu esta matéria? (RI:267)

S7: Foi na 9ª? (S7I:268)

R: Na 9ª? (RI:269)

S7: Já não me lembro. Foi há muito tempo. (S7I:270)

R: Então quantas vezes a pirâmide cabe no cubo? (RI:271)

S7: O volume do cubo... (silêncio). O volume do cubo... (Fazendo cálculos algébricos. Veja Fig 5.65). Quantas vezes o volume da pirâmide cabe no volume do cubo? (S7I:272, 273)

R: Ou pode ser ao contrário. (RI:274)

S7: Uma pirâmide cabe 3 vezes. Cabe 3 vezes. (S7I:275)

R: Então quantas pirâmides podem caber dentro do cubo? (RI:276)

S7: Já que cabe 3 vezes então vão caber 3 pirâmides. **(Boa relação conceitos algébricos e geométricos).** (S7I:277, 278).

.....
R: Pode representá-las? (RI:279)

S7: (Rindo-se) Se posso representar? **(Parece ser uma dificuldade para o E a representação geométrica).** (S7I:280, 281)

R: Pode tentar. Depois explica como fez. (RI:282)

S7: (Tentando em silêncio). Há frases inaudíveis, entretanto o que pude entender ele tinha uma dúvida em relação a segmentos com objectos reais como por ex. uma caneta. Uma caneta ocupa espaço. Portanto se formos a construir uma pirâmide cujas arestas são canetas então não seria possível fazer caber 3 pirâmides). (S7I:283- 286)

R: A fórmula algébrica o que diz? (RI:287)

S4: No cubo cabem 3 pirâmides. (S7I:288)

R: Sem se colidirem, podem se encostar nas faces. (RI:289)

S7: Os dados nos permitem analisar sem construção ou com construção? **(Aparenta que o E pense que os dados podem não ser suficientes para uma abordagem**

algébrica e geométrica do problema ou deve estar a pedir uma outra pista). (S7I:290-292)

R: O que é que nos permite analisar? (RI:293)

S7: Este exercício aqui. Será que o cubo tem o espaço suficiente para caberem 3 pirâmides? **(Aparenta que o E pense que o cubo dado não tenha sido construído de maneira a permitir representar as 3 pirâmides que o método algébrico preconiza).** É possível traçar as 3 pirâmides neste cubo dado? (Rindo-se). (S7I:294-297)

R: Não estou a entender. (RI:298)

S7: As 3 pirâmides... haverá espaço suficiente neste cubo dado para traçar as 3 pirâmides? Está aqui o cubo... (Rindo-se). Acho que encontrei uma pirâmide. (S7I:299, 300)

R: Não percebi! (RI:301)

S7: Acho que encontrei uma pirâmide. (S7I:302)

R: Uma pirâmide de quê? (RI:303)

S7: Uma pirâmide que se sobrepõe com a pirâmide dada. (S7I:304)

R: Qual é? (RI:305)

S7: Esta pirâmide. (S7I:306)

R: Qual é a base e o vértice? (RI:307)

S7: ABEF e o vértice... neste vértice H. **(O método algébrico neste exercício parece ser um trampolim para o método geométrico, pois foi com base no método algébrico que o E ficou motivado a encontrar a solução geométrica).** (S7I:308-310)

R: Qual é a disposição dessa pirâmide? (RI:311)

S7: Há um contacto entre elas. E o contacto surge... surge aqui no segmento AB. O segmento AB e o vértice H será a mesma face desta pirâmide e da pirâmide original. (S7I:312, 313)

R: Ainda acha que os dados não são suficientes para a construção? O que acha? (RI:314)

S7: (Rindo-se). Eu acho... eu acho que os dados geométricos que o exercício apresenta são suficientes. Consegui encontrar um cone (pirâmide) e vou procurar o que falta. **(A boa disposição no ambiente de resolução de exercícios aparenta ajudar no raciocínio pois a pessoa trabalha relaxada).** (S7I:315-318)

R: Aqui conseguiu duas. (RI:319)

S7: Vai faltar mais uma. (S7I:320)

R: Ya, falta mais uma. (RI:321)

S7: Cabem 3. (Procurando a pirâmide que falta em silêncio). Tenho aqui a base DCGH, então... (Silêncio longo). (S7I:322, 323)

R: Já conseguiu encontrar a pirâmide? (RI:324)

S7: (Silêncio longo). É esta. (S7I:325)

R: Qual? (RI:326)

S7: Esta base FGCB e com vértice em H. (S7I:327)

R: Porque é que diz que esta é a 3ª pirâmide? Não colide com as outras? (RI:328)

S7: É assim, uma vez... Parece que o segmento AB aliás AH intersecta o segmento FG. Mas, na verdade não há nenhuma intersecção. Porquê? Nós temos um cubo em que os vértices das faces da pirâmide estão inclinados. (S7I:329-331)

R: Continue. (RI:332)

S7: Estão inclinadas as faces da pirâmide. E temos a parte do cubo, a aresta FG, parece que existe um contacto, mas não há. Tendo esta base, a base do cubo formamos uma pirâmide, e também pode ser esta face do cubo também pode formar uma pirâmide com o mesmo vértice, o vértice H. E assim não haverá nenhuma intersecção, mas um pequeno contacto com... com algumas faces, com algumas faces. Com esta face por ex.

esta face $BC(H)$. Esta face é a mesma com a face desta pirâmide aqui $BCGF(H)$, estão a compartilhar. **(O E tem o raciocínio correcto mas não consegue exprimir correctamente as suas ideias).** (S7I:333-340)

R: Qual é a conclusão que tira? (RI:341)

S7: A conclusão que tiro, claro que existem 3 pirâmides que cabem no cubo (rindo-se). (S7I:342)

R: E pode explicar-me porque chegou a essa conclusão? (RI:343)

S7: Tirei essa conclusão na base dos volumes de duas figuras. Basei-me nos volumes do cubo e da pirâmide. Soube da relação entre o volume do cubo e da pirâmide. No volume do cubo caberão 3 vezes o volume da pirâmide quer dizer dentro do cubo caberão 3 pirâmides. (S7I:344-347)

R: Há uma contradição entre a figura e o raciocínio algébrico? (RI:348)

S7: Não, não há nenhuma contradição. (S7I:349)

WitsEdu

Appendix 10: Extracts of Portuguese transcripts to interviewing phase 2

Task 3 from Lecturer's Test

Student 1

S1: (Lê o enunciando). Então eu fiz assim o exercício. Determine o ângulo formado entre os segmentos de recta AB e CD. Eu tenho aqui... parto do princípio que tenho dois segmentos. E os segmentos estão situados no espaço tridimensional, tridimensional. Primeiro tenho que determinar os segmentos. Tenho que determinar os segmentos sim. Eu tenho as extremidades. Tenho o ponto A e o ponto B. O ponto A tem como as coordenadas -3, 2, 4. O ponto B 2, 5, -2. Primeiro tenho que descobrir este segmento. A partir dessas coordenadas descobrir o segmento. Como? O segmento AB obtem-se subtraindo o B menos o A. Assim fica, dois menos, menos três fica cinco. Subtraindo dois menos menos fica mais, fica cinco. Cinco menos dois fica três. Menos dois menos quatro fica menos seis. Assim já tenho o segmento. Aqui tenho o segmento CD usando o mesmo raciocínio. Portanto o co-seno do alfa é formado pelos segmentos AB e CD. Isto é um produto... interno. É um produto interno. Eu peguei este valor que acabei de calcular achei o seu produto e... o módulo do segmento AB vezes o módulo do segmento CD. Assim apareceu $\cos \alpha = \frac{21}{40,8}$. Então o alfa é igual a 60° . Fiz este cálculo com a máquina. (S1II:3-17)

.....
R: O que estou a ver aqui usou algumas fórmulas. Eu queria saber eh... Aqui temos dois segmentos, né? AB e CD. E queremos determinar o ângulo formado entre eles. O que reparei que estes segmentos não estão aplicados na mesma origem. Estão separados. (RII:18-20)

S1: Sim. (S1II:21)

R: Agora como calculou o ângulo entre estes dois segmentos? (RII:22)

S1: Umh... Estão separados. Está bom. (S1II:23)

R: A fórmula quando deduziram... estes são vectores? (RII:24)

S1: São vectores, sim. (S1II:25)

R: Deduziram quando os dois vectores estavam... (RII:26)

S1: Na mesma origem, sim. (S1II:27)

R: Agora, não sei. Ou estes segmentos estão na mesma origem? (RII:28)

S1: (Silencio.) (S1II:29)

R: Não sei se está a entender? (RII:30)

S1: Eu percebi, percebi, percebi. (Silencio). (S1II:31)

R: Aqui temos o ponto A, o ponto B está aqui... (RII:32)

S1: Dá para ver que não estão no mesmo ponto. (Silencio). Eu só peguei a fórmula. Quando me preparei só vi esta fórmula que era para calcular o ângulo a partir da fórmula. Ya, (rindo-se). (S1II:33-35)

R: Sabe como apareceu esta fórmula? (RII:36)

S1: Sim, demonstrámos. (S1II:37)

R: Como aparece esta fórmula? Pelo menos explique a disposição dos vectores quando deduziram esta fórmula. (RII:38-39)

S1: A disposição dos vectores? (Silencio). Os dois vectores estavam na mesma origem, ya. Quando estava a resolver o teste não me apercebi que os dois segmentos não

estavam na mesma origem. Na altura não me apercebi disso. Não me apercebi disso. (S1II:40-42)

R: Então qual é a sua opinião em relação a sua resolução? (RII:43)

S1: Não pode estar certo. (S1II:44)

S1: Não pode estar certo (rindo-se). (S1II:46)

R: Não entendi? (RII:45)

.....
R: Porque é que diz não está certo? (RII:47)

S1: (Silencio). (S1II:48)

R: Bem, vamos ver. Nós temos este segmento, não é? (RII:49)

S1: Sim. (S1II:50)

R: E temos o outro segmento e vamos supor que é este aqui. (RII:51)

S1: Sim. (S1II:52)

R: Entre estes dois segmentos existe um ângulo entre eles ou não? (RII:53)

S1: Se efectuarmos o prolongamento dos segmentos podemos apanhar intersecção. (S1II:54)

R: Pode fazer o prolongamento? (RII:55)

S1: (Silencio). (S1II:56)

R: Como pode achar o ângulo entre estes dois segmentos? (RII:57)

S1: (Silencio). (S1II:58)

R: Existe um ângulo entre eles ou não? (RII:59)

S1: Bom, assim como estão não existe. Mas fazendo o prolongamento posso apanhar. (S1II:60)

R: Pode fazer o prolongamento. (RII:61)

S1: (Fazendo o prolongamento). (S1II:62)

R: Então, acha que este é o ângulo entre este segmento e este? (RII:63)

S1: Sim. (S1II:64)

R: Porquê? (RII:65)

S1: (Silencio). Porque há uma intersecção entre os dois segmentos. Fazendo essa intersecção obtemos este ponto e posso considerar esta parte como o ângulo entre eles. (S1II:66, 67)

.....
R: É possível transladar este segmento e fazer coincidir o ponto B e o ponto A? Quer dizer, é possível fazer-se a translação? (RII:68, 69)

S1: (Silencio). (S1II:70)

R: Aqui fez o prolongamento. Mas é possível fazer-se uma translação paralela deste segmento até aplicá-lo no mesmo ponto? (RII:71, 72)

S1: (Silencio). (S1II:73)

R: Aprendeu a translação, não é? (RII:74)

S1: Sim, dei. (S1II:75)

R: Transladando um objecto A muda ou mantém as suas propriedades? (RII:76)

S1: Mantém as propriedades. Não muda. (S1II:77)

R: Será que o ângulo será o mesmo que o ângulo que obteve no prolongamento? (RII:78)

S1: Se eu levar este segmento mantendo as suas propriedades, o seu comprimento, eu acho... (S1II:79, 80)

R: Pode fazer essa translação para ver como fica? (RII:81)

S1: (Fazendo a translação em silencio). (S1II:82)

R: Está fazer uma... (RII:83)

S1: Estou a fazer um segmento. (S1II:84)

R: Que transformação é essa? (RII:85)

S1: Geometria. (S1II:86)

R: É geometria. Mas aqui trata-se da translação. Translada este segmento e aplica-o no mesmo ponto. É possível fazer-se isso ou não? (RII:87, 88)

S1: É possível. (S1II:89)

R: Então como é que se faz isso? (RII:90)

S1: (Silencio). (S1II:91)

R: Traça-se duma recta paralela... (RII:92)

S1: Ah, uma recta paralela. (S1II:93)

R: Acho que deram isso na geometria euclidiana. (RII:94)

S1: Claro. (S1II:95)

R: E depois? (RII:96)

S1: Depois traço um segmento com um compasso com a medida deste segmento. (S1II:97)

R: Pode fazer isso? (RII:98)

S1: (Construindo). É possível. (S1II:99)

R: Agora, vai obter um ângulo aqui. Será que é igual a este ângulo (obtido pelo prolongamento)? (RII:100, 101)

S1: Não, não é (rindo-se). (S1II:102)

R: Não é? (RII:103)

S1: Não. Mas... é... é possível. (S1II:104)

R: Como se chamam esses ângulos? (RII:105)

S1: São ângulos alternos internos. São ângulos que se obtém tendo duas rectas paralelas cortadas por uma terceira. Então os ângulos que apanhamos aqui são iguais. São os ângulos... (Silencio). (S1II:106-108)

.....
R: Agora isto, digamos, é um pensamento geométrico o que explicou aqui. Agora quando utiliza esta fórmula, esta fórmula é entre dois vectores que estão aplicados na mesma origem. (RII:109-111)

S1: Sim. (S1II:112)

R: Agora a questão é: Será que esta fórmula satisfaz as condições daquilo que fez? (RII:113)

S1: Acho que sim. Satisfaz. Nós podemos transferir este segmento, e ter um outro que tem a mesma origem usando paralelismo, rectas paralelas, com um compasso transferi este segmento para aqui. E vai me dar a ideia de que este ângulo... estes dois ângulos são iguais. Estou perante duas rectas cortadas, estes dois ângulos são iguais. Há um teorema que diz isso. Se eu posso realmente transferir para aqui, então fico na posição de eu usar esta propriedade. (Inaudível). (S1II:114-119)

.....
R: Agora a minha pergunta, o sr usou vectores e aqui fala-se de segmentos. (RII:120)

S1: Segmentos. (S1II:121)

R: Existe alguma relação entre vectores e segmentos? Por ex. aqui temos o segmento AB e o sr achou o vector **AB**. Então qual é relação entre vectores e segmentos? (RII:122, 123)

S1: Sim. (Silencio). (S1II:124)

R: Não sei se... (RII:125)

S1: Estou a perceber, estou a perceber. A partir dos segmentos fui obter os vectores e depois trabalhar com vectores. Eu acho que há relação. Porque a partir dum... dum... dum segmento... pode-se achar o seu vector formado através das suas extremidades.

Assim peguei as coordenadas do segmento. E trabalhei com as coordenadas do segmento. (S1II:126-129)

R: Para ti o vector e o segmento têm a mesma natureza? (RII:130)

S1: Não, bom... a partir do segmento posso obter o vector do segmento. (S1II:131)

R: Então qual é a relação que existe o vector e o respectivo segmento? (RII:132)

S1: (Silencio). (S1II:133)

R: É o mesmo conceito? (RII:134)

S1: Entre o segmento e o vector? (S1II:135)

R: E o vector. (RII:136)

S1: (Silencio). Bom, o que eu sei é que a partir dum segmento com as coordenadas do segmento posso obter o vector desse segmento. Mas explicar quanto a essência da ligação entre os dois conceitos estou completamente em branco. (S1II:137-139)

R: Quais são as propriedades dum segmento e quais são as propriedades dum vector? (RII:140)

S1: (Silencio). (S1II:141)

R: O segmento tem um sentido? (RII:142)

S1: O segmento não tem um sentido. Mas o vector já tem. Ah, está bom, porque de facto para poder achar este segmento tive que dar um sentido ao meu vector. Dei o sentido, dei o sentido ao vector, então pego nas extremidades, nas extremidades subtraio e vou obter o sentido do vector. A partir desse momento já tenho... o segmento não tem nenhum sentido. Mas a partir do momento que, a partir do momento que eu analiso o segmento e tiro o vector, tendo o vector já tenho o sentido, tenho o sentido. (S1II:143-148)

R: E qual é a relação entre o comprimento do vector e o segmento? (RII:149)

S1: Não percebi. Desculpa. (S1II:150)

R: Um vector tem um sentido, mas também tem um comprimento. Qual é a relação entre o segmento e o comprimento do vector? (RII:151, 152)

S1: (Silencio) (S1II:153)

R: O comprimento é uma medida, né? (RII:154)

S1: Sim. O comprimento é uma medida de facto. (S1II:155)

R: E o comprimento dum vector? (RII:156)

S1: (Silencio). (S1II:157)

R: É uma medida ou não? (RII:158)

S1: Do vector? Do vector em coordenadas. (S1II:159)

R: E qual é o comprimento deste vector? (RII:160)

S1: (Silencio). (S1II:161)

R: Ouviu falar da norma? (RII:162)

S1: Sim, já ouvi. (S1II:163)

R: O que é a norma dum vector? (RII:164)

S1: A norma dum vector é a medida do vector. (S1II:165)

R: É a medida do vector. E a medida dum vector é o que é? (RII:166)

S1: É a norma do vector. (S1II:167)

R: Está a pensar... (RII:168)

S1: Estou a tentar usar a fórmula. (S1II:169)

R: De norma? (RII:170)

S1: Sim. (S1II:171)

R: Aqui utilizou a norma (referindo-se a formula usada pelo estudante para determinar o ângulo)? (RII:172, 173)

S1: É exactamente isto aqui a norma. Quando ponho por ex a norma, o produto... (S1II:174)

R: Onde está a norma aqui nesta fórmula? (RII:175)

S1: É a parte debaixo. (Veja a fórmula usada pelo estudante). (S1II:176)

R: Qual? (RII:177)

S1: O vector **AB**, o módulo do vector **AB**. (S1II:178)

R: O módulo do vector **AB** é que é a sua norma? (RII:179)

S1: Não. O módulo do vector **AB** é a norma... (Silencio). (S1II:180)

R: Por ex estes valores aqui $\sqrt{64}$ e $\sqrt{26}$ o que representam? (RII:181)

S1: (Silencio). (S1II:182)

R: Temos a norma do vector **AB** vezes a norma do vector **CD**. Então, disse que a norma era o módulo do vector ou o comprimento. Então $\sqrt{64}$ tem a ver... (RII:183, 184)

S1: Só pode ser a medida... Ah, está bom. A norma... aliás a $\sqrt{64}$ é o valor da norma do vector **AB**. (S1II:185, 186)

R: E qual é o comprimento do segmento AB? (RII:187)

S1: (Silencio). (S1II:188)

R: É exactamente a norma do vector **AB**, não é? (RII:189)

S1: (Rindo-se). A norma do vector **AB**. (S1II:190)

.....

R: É a mesma coisa. A minha outra pergunta é: Como é que esta fórmula ou por outra temos as coordenadas deste vector. Quando o transladamos para aqui será que as suas coordenadas continuam ser as mesmas e porque? Ou são diferentes? (RII:191-193)

S1: Partindo de princípio que são pontos no... eh... no sentido (espaço) tridimensional, quando nós transladamos o segmento de C para este ponto é visto que muda as suas coordenadas. **(Talvez as coordenadas a que o E1 se refere têm a ver com as coordenadas das extremidades do segmento)**. (S1II:194-197)

R: Muda as suas coordenadas? (RII:198)

S1: Sim. (S1II:199)

R: Então os vectores são diferentes porque as coordenadas são diferentes ou... (RII:200)

S1: Não, até podem não ser. Não podem ser diferentes. (S1II:201)

R: Os vectores são diferentes ou não quando fazemos a translação? (RII:202)

S1: (Silencio). Não, não são. (S1II:203)

R: E as suas coordenadas vão mudar ou são as mesmas? (RII:204)

S1: Vão mudar. As coordenadas vão mudar. (S1II:205)

R: Mudando as coordenadas, tendo coordenadas diferentes será que vão representar o mesmo vector? (RII:206, 207)

S1: (Silencio). Acho que não. (S1II:208)

R: Vamos lá ver se fizermos a translação por ex temos um vector. Este é um exemplo. (RII:209)

S1: Certo. (S1II:210)

R: Consideremos um ex simples partindo da origem. Por ex temos este vector **OA**. Que tem como coordenadas 2 e 1. Vamos transladar para qualquer posição. Vamos supor que este ponto... (RII:211-213)

S1: O ponto zero, zero passa para... (S1II:214)

R: O ponto zero, zero passa para um, um. E este para... vamos sempre conservar o... (RII:215)

S1: O comprimento. (S1II:216)

R: O comprimento, ya. Então teríamos, temos que ter aqui duas unidades. E aqui uma unidade para cima. Quais seriam as coordenadas deste ponto? (RII:217, 218)

S1: Três neste caso. (S1II:219)

R: E aqui seria? (RII:220)

S1: Aqui seria o dois, o dois. (S1II:221)

R: A minha pergunta é: Nós fizemos uma translação paralela deste vector, né? Seja o vector por ex **BC**. Será que as coordenadas do vector **BC** e do vector **OA** são iguais? (RII:222, 223)

S1: Não são, não são. (S1II:224)

R: Pode escrever as coordenadas do vector **OA**? (RII:225)

S1: Aqui temos o ponto $O(0;0)$ e o ponto $A(2;1)$. (S1II:226)

R: Então quais são as coordenadas do vector **OA**? (RII:227) [*What are the coordinates of vector OA?*]

S1: O vector **OA** vai ter dois e... e um (calculando $2-0$ e $1-0$). (S1II:228)

R: Agora o vector **BC**? (RII:229)

S1: Então o vector **BC** nós teremos o ponto $B(1;1)$ e o ponto $C(3;2)$. Então as coordenadas do vector **BC** são 2 e 1. (Rindo-se). (S1II:230, 231)

R: O que constatou? A translação... (RII:232)

S1: A translação não afecta o... as coordenadas do vector. (S1II:233)

R: Qual é a conclusão que tira? (RII:234)

S1: Eu estou a ver que mesmo mexendo as coordenadas... eu posso mudar as coordenadas dos pontos do segmento. Isso não afecta as coordenadas deste segmento. Podem mudar as coordenadas dos pontos mas não mudam as coordenadas do segmento. Por ex nós temos aqui o ponto zero, zero e o ponto 2 e 1. Aqui temos o ponto 3 e 2. Eu mudei as coordenadas dos pontos mas as coordenadas do... do vector continuam as mesmas. Não mudam. Ao mudar... ao transladar este segmento posso mudar as coordenadas dos pontos. Mas não mudo as coordenadas do vector. Então isso permite-me usar a fórmula. Porque mudei as coordenadas dos pontos deste segmento, mas não vou mudar as coordenadas do vector. Então permite-me usar esta fórmula para determinar o ângulo formado pelos dois segmentos. (S1II:235-244)

Student 3

S3: Era para determinar o... o... ângulo formado. Primeiro determinei o (segmento) AB como se fosse um vector. E o CD também determinei o vector. E resultaram essas coordenadas. E para calcular o ângulo usei aquela fórmula do produto interno. Que dizia que a vezes b , multiplicação de dois vectores, seria igual a módulo de um vezes o módulo de dois vezes o co-seno do ângulo formado. Então usei esta fórmula para determinar o ângulo. (S3II:7-12)

S3: Sim, eu considerei a seguinte... (ideia). Nós temos um segmento e o outro. Se eu for a deslocar um (segmento) para aqui, uma paralela, se eu deslocar este para aqui sempre haverá um ângulo formado. (S3II:18-20)

S3: O segmento AB é este. Este é o segmento CD. (S3II:15)

R: Estou a ver que estes segmentos estão separados um do outro. Como é que pode achar o ângulo entre segmentos separados? (RII:16, 17)

R: Aqui representaste geometricamente fazendo um esboço. Já verificaste onde estão os pontos? Este é o segmento AB. (RII:13, 14)

R: O que vejo aqui, você utilizou vectores enquanto temos segmentos. Qual é a relação entre segmentos e vectores? (RII:32, 33)

S3: A relação entre segmentos e vectores? (S3II:34)

R: Sim, porque aqui se fala de segmentos. (RII:35)

S3: Sim. (S3II:36)

R: Aqui se fala de segmentos. Como é que transfere segmentos, por exemplo aqui, o AB disse que era um vector ou é um segmento também o AB? (RII:37, 38)

S3: O AB? Esse aqui estava a designar o vector do segmento AB. (S3II:39)

R: O vector do segmento AB. Então há uma relação entre os dois conceitos? (RII:40)

S3: Há uma relação. (S3II:41)

R: Qual é a relação que há? (RII:42)

S3: A partir do momento em que nos dão as coordenadas, nós podemos determinar os vectores. Acho que é isso. Um segmento parte dum ponto e termina no outro. (S3II:43, 44)

R: Então a relação entre o segmento e o seu vector é... (RII:45)

S3: Acho que é a medida. (S3II:46)

R: A medida. Mais alguma coisa que queira acrescentar? (RII:47)

S3: Não. (S3II:48)

.....
R: Ao usar vectores falou de translação de segmento não é? (RII:51)

S3: Sim, por acaso sobre a translação ainda não chegamos a dar. (S3II:52)

R: Agora não falou. Mas, falou anteriormente. (RII:53)

S3: Foi um... um pensamento que eu tive. Mas, prontos, nós temos duas rectas aqui, pode existir um ângulo que se forme entre essas duas rectas aqui. (S3II:54, 55)

R: Concerteza deve existir um ângulo. Agora, como determinar esse ângulo? (RII:56)

S3: Eu tive a ideia se eu posso passar uma paralela a este aqui e passar esta recta para aqui, depois vou ter um ângulo entre esta recta e esta aqui. (S3II:57, 58)

R: O que eu queria era só ver como que durante este processo, porque isto está na sua ideia que se pode fazer a translação. Mas, porque quando faz esses cálculos pensa que está a fazer também esta transformação? É isso que queria saber. Não sei se sabe alguma coisa sobre isso? (RII:59-62)

S3: Em relação a translação não fiz nenhuns cálculos. (S3II:63)

R: Acho que o próprio vector pode mostrar porque... (RII:64)

S3: Depois deste teste houve uma discussão, não uma discussão... houve... sobre este exercício mesmo. Eu e alguns colegas não sabíamos exactamente como, se houvesse uma translação, se deviam mudar as coordenadas ou qualquer coisa assim para determinar o ângulo. (S3II:65-68)

R: E qual foi a conclusão que tiraram? (RII:69)

S3: Discutiu-se, discutiu-se e não chegamos a nenhuma conclusão. Ficamos todos interrogados. (S3II:70, 71)

.....
R: Vamos supor que temos este vector que começa na origem por ex. é um vector mais simples. Quais são as coordenadas deste vector? (RII:72, 73)

S3: As coordenadas deste vector? (S3II:74)

R: Sim, vamos supor AB. Pode escrever aqui as coordenadas do vector **AB**? (RII:75)

S3: (Escreveu **AB** = (2; 1)). (S3II:76)

R: Agora, fazendo a translação, vamos supor para este ponto (veja o esboço abaixo). Que ponto seria este aqui? (RII:77, 78)

.....
R: Que ponto seria este aqui? Fiz a translação. Vamos supor (o vector) **DC**. Quais seriam as coordenadas do vector **DC**? (RII:82, 83)

S3: Seriam as mesmas. Dois e um. (S3II:84)

R: Então que conclusão é que tira? (RII:85)

S3: Não há nenhuma... não há nenhuma... quanto ao vector não há nenhuma... quanto as coordenadas do vector não há nenhuma diferença. (S3II:86, 87)

R: Então o que acha quando fizer a translação deste vector para ali (referindo-se aos vectores do exercício) com as mesmas coordenadas que conclusão é que tira? (RII:88, 89)

S3: Que as coordenadas do vector serão as mesmas. (S3II:90)

R: Então o que significa trabalhar com este vector trasladado para aqui? (RII:91)

S3: São paralelos. As coordenadas do vector serão as mesmas porque serão paralelos. (S3II:92)

R: Está a tirar sua conclusão ou... (RII:93)

S3: Sim, tirei. As coordenadas serão as mesmas. (S3II:94)

R: Agora já sabe porque é que... (RII:95)

S3: Sim. (S3II:96)

R: Sabe o que é? (RII:97)

S3: Que se formos a transladar, sendo paralelos, as coordenadas do vector não mudam. (S3II:98)

Student 4

S4: Em primeiro lugar, o que eu tenho aqui são pontos. Mas sabe-se que esses pontos podem determinar vectores. Ou seja para ter o segmento que aqui se refere que é AB eu vou fazer passar numa das extremidades pode ser o A ou o B dar um sentido em que deixa de ser apenas uma linha qualquer. Basta ter um sentido orientado de A para B que vai ser um vector. Esse vector vai ser formado pela diferença das coordenadas cartesianas. O vector **AB**. E o outro vector **CD** também será a diferença das coordenadas cartesianas dadas também em R três. Então dado isto, não é, dado isto para determinar o ângulo formado por estes dois vectores, já aprendi, sei qual é a expressão. Então o ângulo que aqui se pede, como eu estava a explicar, que os vectores iriam ser obtidos pela diferença das coordenadas cartesianas, então aqui tenho as coordenadas do vector **AB** e as coordenadas do vector **AC** pelo processo que acabei aqui de explicar. Então o ângulo por eles formado será exactamente o produto dos dois vectores, e o produto será o produto dos dois vectores ou seja o produto interno dos dois vectores é igual ao módulo dos dois vectores vezes o ângulo que é pedido. Então, se eu tenho, se eu tenho as coordenadas dos vectores, não é, e com as coordenadas dos vectores posso obviamente determinar o módulo de cada vector. Determinado o módulo de cada vector posso também dado que o produto interno também pode ser feito quando temos coordenadas cartesianas que seria exactamente esta parte que eu aqui coloco, que já será exactamente o produto das coordenadas que já, que já defini dos vectores. E aqui tenho o módulo dos vectores. Então a única coisa que me falta exactamente é o ângulo que me é pedido. Então isolando como é o caso e cheguei aqui a este, a este valor. E estes são procedimentos algébricos. Então daqui cheguei, fiquei com o coseno de beta igual a 21 sobre a raiz (quadrada) deste valor. E exactamente este beta é o arcoseno deste valor que é a função inversa. O beta que é o ângulo pedido que é o arcoseno e é um valor aproximado. (S4II:6-30)

R: Disse que usou esta fórmula para resolver este exercício. (RII:31)

S4: Sim. (S4II:32)

R: Mas agora aqui estou a ver que são segmentos AB e CD. E como logo passa para vectores? Tratando-se de segmentos. (RII:33, 34)

S4: Não sei se percebo bem a questão. Como é que passo exactamente...(S4II:35)

R: De segmentos para vectores. (RII:36)

S4: Eu passo por um segmento, por um segmento podemos obter um vector. Ou seja se eu por ex. considerar um segmento qualquer eu posso extrair nele um vector. E este, este vector fará parte do segmento. (S4II:37-39)

R: O que significa que um vector fará parte dum segmento? (RII:40)

S4: Por um simples motivo. Se eu tenho vamos supor que este seja... onde tenho... seja o espaço por ex. Aqui teria A, aqui B, não é? (S4II:41, 42)

R: Continue. (RII:43)

S4: Este é um segmento. Se eu quisesse determinar, isso depende dos interesses que eu tenho, se eu quero determinar um ângulo e eu sei que com base em vectores posso determinar, não me custa fazer com que este segmento passe a ser um segmento orientado (**Para o E4 o vector é um segmento orientado**). Assim como estava antes não era um segmento orientado. A partir de agora é um segmento orientado que se chama vector. (S4II:44-49)

.....
R: Agora se formos a ver o ângulo entre dois vectores, os dois vectores devem estar na mesma origem, não é? (RII:50, 51)

S4: Não é obrigatório que esteja na mesma origem. Eu posso muito bem determinar o ângulo entre estes dois vectores. Não estão na mesma origem. (S4II:52, 53)

R: Como é que se faz para... (RII:54)

S4: Na verdade se eu tenho estes dois vectores posso muito bem fazer isto. E forma-se este ângulo. (S4II:55, 56)

R: Qual é a transformação que fez? (RII:57)

S4: É como quem diz eu estou a puxar este vector de modo que esteja neste. Eu vou fazer de conta que estes vectores estão no mesmo plano. Vamos supor que eu quisesse determinar apenas (o ângulo) dos vectores que estão na mesma origem. Eu estaria a dizer que todos os vectores no espaço que não estão na mesma origem não formam nenhum ângulo. O que não é a verdade. O facto dos vectores não estarem na mesma origem não quer dizer que não se pode determinar o ângulo entre eles. Isso é algo que eu creio que está claro. Eu acho que não coloquei aqui o esboço. Não coloquei o esboço. Ah está aqui, está aqui. (S4II:58-65)

R: Ah o sr trasladou o vector. (RII:66)

S4: Sim. (S4II:67)

.....
R: Agora aqui na resolução algébrica este facto de transladar como é que transparece nos cálculos? (RII:68, 69)

S4: Como é que transparece? (S4II:70)

R: Eu creio que quando deduziram esta fórmula, esta fórmula do produto escalar como era a disposição dos dois vectores? Estavam na mesma origem ou em origens diferentes? (RII:71, 72)

S4: Creio que estavam na mesma origem. (S4II:73)

R: Estavam na mesma origem. Agora ... (RII:74)

S4: Parece-me que foi algo assim. Se fez a projecção de um sobre o outro. (S4II:75)

R: Como é que esta mesma fórmula que foi deduzida a partir de dois vectores que estão na mesma origem pode servir para dois vectores que estão afastados? (RII:76, 77)

S4: O... o...o que nós estamos a fazer, o que na verdade, aparentemente eu creio que... podem estar afastados mas é possível fazer uma transformação de tal forma que nós

possamos encontrar projecções. Eu creio que na matemática nós não temos exactamente condições exactas só se faz assim mas é possível transformar. Se escrevo 4 eu posso arranjar maneira... se escrevo 2 eu posso eu posso arranjar uma outra maneira de escrever que seria 4 sobre 2. Ninguém vai me dizer que isto não é 2. Quer dizer o que é mais importante é criar condições para que se apliquem as propriedades. É o que foi que eu fiz. Porque de facto eu não devia determinar o ângulo entre dois vectores se eu não tivesse feito essa translação. Não faria sentido. Pelo menos para mim. A minha prestação termina por aí. (S4II:78-87)

.....
R: Então o sr está a dizer que este vector transladado e este vector que estava aqui são vectores... (RII:88 and 89)

S4: São, são de facto paralelos. (S4II:90)

R: São paralelos. E as suas coordenadas como é que são? São diferentes ou iguais? (RII:91)

S4: Não são diferentes de forma alguma. São as mesmas. (S4II:92)

R: Mesmo depois da translação? (RII:93)

S4: Mesmo depois da translação. Senão, senão o ângulo não seria o mesmo. (S4II:94)

R: As coordenadas são as mesmas mesmo depois da translação? (RII:95)

S4: Pelo menos devem continuar as mesmas senão não seria, é aquilo que eu expliquei, não seria o ângulo formado por este vector e este. Se este ao ser transladado mudasse as coordenadas, seria este? Não. (S4II:96-98)

R: Então ao se fazer a translação não altera as coordenadas. (RII:99)

S4: Não. . (S4II:100)

R: Qual é a explicação disso? Se há esse movimento... (RII:101)

S4: Eu acho que os vectores paralelos têm as mesmas coordenadas. Vectores paralelos que estão no mesmo plano, eu creio, que têm as mesmas coordenadas. O facto de serem vectores paralelos. (S4II:102-104)

R: Isso afirma porque deduziram ou porque foi visto ou porque acredita? Qual é a razão? (RII:105)

S4: Eu não sei se sei explicar. Não sei explicar exactamente o que acontece. Mas eu acredito nisso. Porque primeiro pelo princípio que eu aqui eu aplico. Eu acho que as coordenadas cartesianas só poderiam sofrer uma transformação. Se eu talvez aplicasse um outro processo, porque a única coisa que eu faço é como quem diz estou a deslocar o vector, algumas, algumas unidades... eu creio que nessas unidades o vector mantém as suas coordenadas cartesianas. Eu não tenho uma sustentabilidade mais do que essa. Mas foi esse o processo que eu apliquei. (S4II:106-112)

R: Mas já verificou isso quando translada um vector as suas coordenadas permanecem? (RII:113)

S4: Nunca, nunca verifiquei. (S4II:114)

R: Mas acredita que isso é assim? (RII:115)

S4: Sim, acredito. (S4II:116)

R: Não seria demais fazer essa experiência. Translada um vector qualquer e verifique se mantém as suas coordenadas em qualquer posição. Translação paralela. (RII:117, 118)

S4: (Silencio). (S4II:119)

R: Acha que é interessante fazer isso? (RII:120)

S4: Sim, por acaso é. Nunca pensei. O meu raciocínio nunca chegou a ser prático entanto que verificar se essa translação tem alguns efeitos ou não no que diz respeito a coordenadas cartesianas. Nunca pensei. (S4II:121-123)

R: Mas um objecto que é transladado será que muda alguma coisa? (RII:124)

S4: Não. Eu parti do princípio de que esse objecto... sofre algum movimento, mudou de posição, mas não mudou de tamanho nem da forma. Se for um balde, eu coloco aqui. Se o coloco a 5 metros de altura, não deixa de ser balde. (S4II:125-127)

R: Seria essa explicação suficiente para explicar porque as coordenadas... (RII:128)

S4: Essa é que é a questão. Não sei se a explicação que acabei de dar chega a ser... pode ser, agora, não sei se é suficiente. (S4II:129, 130)

R: Mais alguma coisa que queira acrescentar sobre este exercício? (RII:131)

S4: Creio que não, creio que não. (S4II:132)

.....

Student 5

S5: A primeira pergunta diz determine o ângulo alfa formado pelos segmentos de recta AB e CD sendo A com suas coordenadas -3, 2 e 4; B(2, 5, -2); C(1, -2, 2) e D(4, 2 e 3). Então eu tenho aqui estas rectas. Tenho segmentos de recta, então a minha ideia foi de encontrar um vector para cada par de rectas. Um vector entre a recta A e a recta B. Assim como para recta C e a recta D. (S5II:4-8)

R: Continue. (RII:9)

S5: E depois apliquei a fórmula para determinar o ângulo. (S5II:10)

R: Vamos ver como implementou essas ideias. (RII:11)

S5: Eu encontrei o vector **AB**. Podia ter colocado por ex. **a** e encontrei estes valores. (S5II:12)

R: E depois? (RII:13)

S5: Achei esta matriz aqui. Bom, eu penso que fiz aqui uma confusão. Achei aqui e depois tive zero. Então eu disse que o ângulo é igual a zero graus. E os segmentos eram paralelos. Deve ser isso. Mas talvez se tivesse encontrado uma outra fórmula. Há uma outra fórmula aí. Não sei se posso usar agora. (S5II:14-17)

R: Pode apresentar. Mas antes de entrar nessa nova ideia. Porque usou este conceito diz que é matriz? Era para quê? (RII:18, 19)

S5: Aqui era para ver se as rectas, qual era a posição das rectas. Então se as rectas não... não fossem iguais a zero havia de concluir portanto que as rectas não eram paralelas. E como tal iria tentar achar o ângulo que as rectas formariam. (S5II:20-22)

R: Primeiro queria saber qual era a posição das... (RII:23)

S5: Das rectas. (S5II:24)

R: Mas essa matriz porque nos dá a posição das rectas? (RII:25)

S5: Como, como... aqui por ex. que tenho igual a zero, significa que as rectas são paralelas. Seriam paralelas. Então o ângulo entre duas rectas paralelas é igual a zero graus. (S5II:26-28)

R: Concerteza. Só que eu queria saber como é que relaciona a matriz com a posição das rectas. (RII:29, 30)

S5: Acabávamos de dar uma matéria relacionada com os planos. Estávamos a ver vectores complanares. São complanares quando... quando, portanto, eh... quando achamos esta matriz e for igual a zero. (S5II:31-33)

R: Vectores complanares. O que significa vectores complanares? (RII:34)

S5: São... são... podem estar no mesmo plano. Ou estão em planos paralelos. (S5II:35)

R: Como é que aparece esta matriz para indicar que quando for igual a zero as rectas são paralelas? (RII:36, 37)

S5: Eu tiro por ex. as coordenadas destes vectores e eu acho a matriz. (S5II:38)

R: Ainda não estou a entender porque é que a matriz tem a ver com a posição das rectas. Talvez, não sei se deduziram ou não. Eu creio que o professor não veio logo e deu a matriz sem ter explicado como chegou a tal matriz. (RII:39-41)

S5: Não veio logo. (S5II:42)

R: Eu creio que ele deu uma ideia de como chegou a tal matriz. (RII:43)

S5: Deu a ideia, sim. Não estou a recordar-me agora, mas tem... fazíamos...).

Então formávamos esta matriz a partir destes, diria que são coeficientes. Quando achávamos a matriz e obtínhamos igual a zero, víamos que os vectores eram complanares. Estavam em planos paralelos. (S5II:44-49)

R: Mas agora, qual é a diferença entre uma matriz e um determinante? (RII:50)

S5: (Silêncio). (S5II:51)

R: Ouviu falar do conceito determinante? (RII:52)

S5: Ouvi falar, ouvi falar. (S5II:53)

R: Qual é a diferença entre uma matriz e um determinante? (RII:54)

S5: Bem, é que... é que... determinante por ex. nós podemos obter vamos supor o valor do x , y e z . Eu posso por ex. determinar o determinante do x (**Fórmula de Cramer**). (S5II:55, 56)

R: Pode dar um exemplo? (RII:57)

S5: Por ex. se eu quiser determinar o determinante do x eu não... não... não utilizo o x . Então trabalho com estes valores aqui que estão deste lado (**Teorema de Laplace**). Mas eu penso que no fundo, no fundo não há diferença. (S5II:58-60)

R: A diferença entre... (RII:61)

S5: A diferença entre... entre achar o determinante. Em princípio não há nenhuma diferença. O que eu fiz foi praticamente... (inaudível). (S5II:62, 63)

R: Porque num determinante o nº de linhas tem que ser igual ao nº de colunas não é isso? (RII:64)

S5: Sim, sim. (S5II:65)

R: E numa matriz o nº de colunas e o de linhas pode ser qualquer. Agora eu não sei aqui como conseguiu fazer o cálculo. Porque numa matriz os cálculos não são deste tipo. Porque tem outras operações. E por queria saber qual é a diferença entre matriz e determinante. E esta forma (que usou) é de determinante. Para matriz geralmente usa-se parêntesis. (RII:66-70)

S5: São parêntesis? (S5II:71)

R: Sim. Agora não sei se queria falar dum determinante ou duma matriz quando estava a explicar? (RII:72 and 73)

S5: Sim, porque no... eu... eu... também posso entender para além de funcionar... funcionar como um módulo também. (S5II:74, 75)

R: Funcionar como um módulo? (RII:76)

S5: Como um módulo também. Se tivesse um nº negativo por ex. achava o seu módulo. (S5II:77)

R: Isto é módulo? (RII:78)

S5: Sim, sim. (S5II:79)

R: Nos determinantes depois usavam módulos também? (RII:80)

S5: Nos determinantes? Nos determinantes porque o... o... o problema... os determinantes como tal na sala agente não aprende. Quando nós precisamos de utilizar determinantes nós vamos buscar. Quer dizer, é um conhecimento que se supõe que agente já tem. (S5II:81-84)

R: Não deram... (RII:85)

S5: Aqui na Universidade não. Talvez tínhamos que dar no Cálculo. Porque determinantes é uma matéria da 12ª. (S5II:86, 87)

R: Ah, viram na 12ª? (RII:88)

S5: Na 12ª. Mas fiz a 12ª há muito tempo. Então quando é para utilizar, agente vai buscar um conhecimento que não se recorda e que se supõe que agente já deu. (S5II:89, 90)

.....
R: Então continue com aquela outra maneira que queria resolver. (RII:91)

S5: A outra maneira por ex. era... era... era a fórmula para determinar o ângulo. (Veja Fig 5.87). (S5II:92 and 93)

.....
R: Vamos simplificar o trabalho. Vamos supor que o resultado seja $\frac{1}{2}$. (RII:95)

S5: Então $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Então iria procurar um ângulo cujo co-seno é igual a $\frac{1}{2}$. (S5II:96)

R: Agora esta fórmula que usou é para achar o ângulo entre quê? (RII:97)

S5: Neste caso é o ângulo formado entre os vectores **a** e **b**. (S5II:98)

.....
R: Agora aqui nós temos seguimentos. Não são vectores. Como de segmentos passa para vectores? Há alguma relação entre segmentos e vectores? (RII:99, 100)

S5: Há. (S5II:101)

R: Qual é a relação que existe? (RII:102)

S5: É que quando nós temos por ex. um segmento ou uma recta nós podemos achar a sua... o seu... o seu... vector normal. (S5II:103, 104)

R: Não entendi essa explicação. Pode explicar outra vez através... (RII:105)

S5: Duma figura? (S5II:106)

R: Sim, duma figura. Falou do vector normal. Não estou a entender muito bem isso. (RII:107)

S5: Eu também tenho muitos problemas. (S5II:108)

R: Tem o segmento AB. (RII:109)

S5: Tenho este segmento, tenho esta recta por ex. e a outra recta aqui. (Em silencio desenhando um sistema cartesiano). (S5II:110, 111)

R: Então temos o segmento AB. O que quer fazer com este sistema cartesiano? (RII:112)

S5: Era para representar o... o... o segmento normal. (S5II:113)

R: O segmento normal ou o segmento AB? (RII:114)

S5: O segmento AB. (S5II:115)

R: E depois? (RII:116)

S5: E depois podemos encontrar... neste segmento AB eu transformei este segmento em vector **a** por ex. (S5II:117, 118)

R: Então vector e segmento é mesma coisa. Porque disse que transformou o segmento AB no vector **a**. (RII:119, 120)

S5: É porque o... o... o... vector normalmente nós temos que indicar o sentido. (S5II:121)

R: E no segmento? (RII:122)

S5: E no segmento temos AB. (S5II:123)

R: Agora qual é a relação que vê entre este vector e o seu segmento? (RII:124)

S5: (Silencio). (S5II:125)

R: Ou são nomes diferentes para a mesma coisa? É isso? (RII:126)

S5: Não. Eu penso que o segmento e o vector... (Silencio). (S5II:127)

R: O que eu quero ver é que aqui estamos a achar o ângulo entre estes dois vectores **a** e **b**. (RII:128)

S5: Sim, sim. (S5II:129)

R: E diz “para eu achar o ângulo entre os segmentos AB e CD, primeiro, eu transformo os segmentos em vectores. E depois vou aplicar esta fórmula.” (RII:130, 131)

S5: Sim, sim. (S5II:132)

R: Agora eu queria saber. Achar o ângulo entre os segmentos AB e CD é a mesma coisa que achar o ângulo entre os vectores **a** e **b**? (RII:133, 134)

S5: Aqui, aqui por ex. não estou a achar o ângulo entre os segmentos AB (e CD). Estou a achar o ângulo formado pelas rectas AB e CD. Talvez aqui se calhar haveria uma outra recta assim. **(S5 pelo facto dos segmentos estarem separados sem se intersectarem e para que se forme um ângulo entre eles prefere usar o conceito recta que pensa que se podem encontrar num sítio qualquer. Entretanto o problema é espacial e as rectas podem ser cruzadas e não se intersectarem).** (S5II:135-140)

R: E qual seria essa recta? (RII:141)

S5: Seria CD. Seria CD. Ninguém disse que as rectas estão desta maneira. Mas posso supor que aqui por ex., por ex. tenho AB... (inaudível)... como este ângulo aqui.... (silêncio). (S5II:142-144)

.....
R: Agora, o seu desenho o ponto C coincide com o ponto A. (RII:145)

S5: Está coincidir. (S5II:146)

R: Mas se formos ver as coordenadas, são diferentes. Não pode ser o mesmo ponto. (RII:147)

S5: Aqui por ex. teria o B. (S5II:148)

R: Mas pelo que estamos a ver estes segmentos não estão unidos pelo... (RII:149)

S5: Não estão, não estão. (S5II:150)

R: Estão separados. Agora como é que explica que esta fórmula que usou vai exactamente achar o ângulo entre estes dois segmentos, se estão separados. Por ex. temos um segmento aqui, o AB, o outro segmento talvez está aqui CD. Será que existe um ângulo entre estes dois segmentos? (RII:151-154)

S5: Entre estes dois segmentos? Na posição em que se encontram... (S5II:155)

R: Porque não estão aplicados na mesma origem. (RII:156)

S5: Não estão. (S5II:157)

R: Mas agora como é que podemos usar uma fórmula que usa dois vectores que têm a mesma origem? (RII:158, 159)

S5: Sim, sim. (S5II:160)

R: Como é possível usar esta fórmula e servir para este caso aqui. Não sei se está a perceber a minha dúvida? (RII:161, 162)

S5: Sim, sim. (Silêncio). (S5II:163)

R: O que acha. Serve ou não serve? O sr diz que serve. Então, porque é que serve? (RII:164)

S5: Eu penso que serve por causa das suas normas. Porque temos que achar a norma de cada uma das rectas. (S5II:165, 166)

R: O que é a norma? (RII:167)

S5: A norma é um... é um vector que... é um vector perpendicular à recta. (S5II:168)

R: A norma? (RII:169)

S5: Sim. (S5II:170)

R: Agora, se queremos a norma do vector **a**, o que representa? (RII:171)

S5: (Silêncio). (S5II:172)

R: A norma do vector é um número ou um vector? (RII:173)

S5: É um número. (S5II:174)

R: Esse número representa o que é? (RII:175)
S5: O comprimento. (S5II:176)
R: O comprimento de quê? (RII:177)
S5: O comprimento desse vector. (S5II:178)
R: Seria este comprimento, não é deste vector, a norma é isso? Daqui para aqui. É essa ideia que tem? (RII:179, 180)
S5: Sim penso dessa maneira, mas não tenho muita certeza. (S5II:181)
R: Não tem muita certeza porquê? (RII:182)
S5: Não tenho muita certeza. Mas a norma é o valor... é o valor numérico de um vector. (S5II:183)
R: O sr está a dizer que a esta fórmula serve porque se determina a norma dos vectores. (RII:184)
S5: De cada um dos vectores. (S5II:185)
R: De cada um dos vectores. A medida deste segmento tem a ver com a norma deste vector ou não? Quer dizer a medida do segmento AB tem a ver com a norma do vector **AB**? Ou são coisas diferentes? (RII:186-188)
S5: Não. Porque AB a sua norma é diferente do próprio segmento. O... o... o segmento AB não pode ser igual a sua norma. (S5II:189, 190)
R: A medida ou o comprimento do segmento AB. Usam comprimento? (RII:191)
S5: Sim, sim. (S5II:192)
R: Qual é a diferença entre o comprimento do segmento AB e a norma do vector **AB**? (RII:193)
S5: Neste caso não há diferença. (S5II:194)
R: É mesma coisa? (RII:195)
S5: Sim, sim. (S5II:196)
R: Porque é a mesma coisa? (RII:197)
S5: Eu parto do princípio de que a norma do segmento AB se obtém achando a diferença vectorial. (S5II:198-199)

.....

R: Agora vamos ver o seguinte. O sr disse que temos de traçar rectas assim. É isso? (RII:200)
S5: Eu creio que sim. (S5II:201)
R: Prolongando assim já podemos ver que... (RII:202)
S5: Há um ângulo formado. (S5II:203)

.....

R: Há um ângulo formado. Considera as rectas destes segmentos. (RII:207)
S5: Sim, sim. (S5II:208)
R: Prolongando-se este segmento claro que vai intersectar este outro segmento e vai formar um ângulo. (Considerando que estão no mesmo plano). Mas será que esta fórmula aplica-se neste caso ou quando os dois segmentos estão unidos num ponto? (RII:209-211)
S5: Bom, eu penso que acabaria, acabaria acontecendo o mesmo. Porque teríamos... teríamos... que traçar um vector perpendicular a esta recta aqui. (S5II:212, 213)

.....

R: E depois? (RII:215)
S5: Eu acharia por ex o ângulo. (S5II:216)
R: Como acharia o ângulo? (RII:217)
S5: Por ex se eu tivesse a medida deste, deste vector aqui eu podia utilizar esta razão ou a outra. (S5II:218, 219)
R: Utilizando o que é? (RII:220)

S5: Para este aqui utilizaria co-seno que é o cateto oposto sobre a hipotenusa. (S5II:221)

R: Neste outro caso como poderias fazer? (RII:222)

S5: Neste outro caso seria necessário traçar também um segmento perpendicular a esta recta. (S5II:223, 224)

R: Agora há uma questão interessante porque aqui diz é o comprimento dos vectores. Mas quando eu prolongo aqui este comprimento aumenta. (RII:225, 226)

S5: Sim, sim. (S5II:227)

R: Até no ponto de intersecção. Agora como é que esta fórmula pode explicar isso? Porque o comprimento aqui já aumentou. Está a perceber esta situação? (RII:228, 229)

S5: Sim, sim. (S5II:230)

R: Já a norma não será esta do vector **CD** mas um pouco mais. (RII:231)

S5: Estou a perceber. (S5II:232)

R: Eu só queria saber porque usa esta fórmula para este caso aqui? Porque esta fórmula foi deduzida quando os vectores estão na mesma origem. Mas aqui, para termos essa condição, temos que prolongar o segmento. E o comprimento aumenta. E estou a ficar mais confuso. (RII:233-236)

S5: Eu penso em vez de prolongarmos nós podemos unir as rectas. (S5II:237)

R: Unir como? (RII:238)

S5: (Silêncio). Transportarmos este segmento daqui para aqui. (S5II:239)

R: O sr está a dizer para levarmos este segmento e colocá-lo aqui? Com se chama esse processo? Essa transformação de levarmos este segmento e colocá-lo aqui? (RII:240, 241)

S5: Transportar o segmento. (S5II:242)

R: Transportar. Mas tem uma palavra... não sei se aprendeu transladar. (RII:243)

S5: Transladar. Translação. (S5II:244)

R: Quando transladamos este segmento para aqui muda alguma coisa? Em termos de comprimento, direcção...? (RII:245, 246)

S5: Não muda. Apenas depende do sentido do ângulo que nós utilizamos para a translação. (S5II:247, 248)

R: Temos que transladar este segmento para pôr aqui. O A coincide com o C e aqui teríamos o D. Então, teríamos esta situação. Mas, a minha pergunta é. Nós estamos a trabalhar com coordenadas? (RII:249- 251)

S5: Sim, com coordenadas. (S5II:252)

R: Quando traslado o segmento conservo o mesmo comprimento e a mesma direcção também. Translação paralela. Agora, qual é o efeito que a translação faz nas coordenadas? Serão as mesmas coordenadas ou alteram? (RII:253- 255)

S5: Alterariam. (S5II:256)

R: Alterariam e significaria que esta fórmula também teria que alterar ou não? Tinha que ter outras coordenadas. (RII:257, 258)

S5: (Silêncio). (S5II:259)

R: Não sei se está a perceber? (RII:260)

S5: Estou a perceber. Porque temos duas rectas paralelas, mas este ponto ao passar daqui para aqui muda as suas coordenadas. (S5II:261, 262)

R: Agora será que esta fórmula vai servir para este caso? Porque esta fórmula, eu acho que funciona para aquele caso onde os segmentos estão unidos num ponto. Agora como vamos fazer? Será que funciona esta fórmula para este caso ou temos que descobrir uma outra? (RII:263-266)

S5: No momento não estou a ver como fazer (rindo-se). (S5II:267)

.....

R: Vamos lá ver. Nós estamos a trabalhar com coordenadas. Temos este ponto O. Pode dizer quais são as coordenadas aqui? (RII:268-269)

S5: Zero, zero, zero. (S5II:270)

R: Vamos considerar no plano para vermos bem. Depois podemos generalizar para o espaço. Então, zero, zero. Consideremos um vector cuja extremidade vamos supor que é dois e um. (Veja a Fig em baixo). Quais são as coordenadas deste vector? Vamos supor **OA**. (RII:271-274)

S5: Dois e um. (S5II:275)

R: É dois e um. Agora vamos trasladá-lo mantendo a direcção, o sentido e o comprimento. Vamos obter o vector **BC**. Quais são as coordenadas do vector **BC**? (RII:276, 277)

S5: Se nós ao trasladarmos e considerarmos que também este eixo, trasladamos este eixo aqui... (S5II:278, 279)

R: Mas como se calcula as coordenadas dum vector? Pode escrever as coordenadas do vector **OA**. Quais são? (RII:280, 281)

S5: As coordenadas do vector **OA** são dois e um. (S5II:282)

R: E as coordenadas do vector **BC**? (RII:283)

S5: **BC**, vamos supor que... neste caso seria dois, aqui no y é que varia é três. (S5II:284)

R: No ponto B quais são as coordenadas? (RII:284)

S5: No ponto B temos as coordenadas zero e um. (S5II:285)

R: E o ponto C? (RII:286)

S5: E o ponto C tem as coordenadas dois e três. (S5II:287)

R: Como se calcula (as coordenadas do) vector **BC**? (RII:288)

S5: Vamos ter C-B. Então temos que ter as coordenadas dois menos zero ficaria dois, três menos um ficaria dois. (S5II:289, 290)

R: Porque aqui é três? (RII:291)

S5: Bom, eu aqui coloquei três. (S5II:292)

R: Porque? Aqui é uma unidade. (RII:293)

S5: É uma unidade. Aqui é um, bom, seria dois. (S5II:294)

R: Então, pode pôr aqui dois. (RII:295)

S5: Então, dois menos um fica um. (S5II:296)

R: Agora vamos comparar as coordenadas do vector **BC** e do vector **OA**. (RII:297)

S5: **BC** e **OA**. São as mesmas. São as mesmas coordenadas. (S5II:298)

R: O que significa isso? (RII:299)

S5: Ok, significa que as coordenadas mantem-se. (S5II:300)

R: Quando fizemos o que é? (RII:301)

S5: Quando trasladamos. (S5II:302)

R: Quando trasladamos o que é? (RII:303)

S5: Quando trasladamos o vector. Neste caso o vector **OA** para **BC**. (S5II:304)

R: Então esta fórmula serve para qualquer tipo de... (RII:305)

S5: Translação. (Vectores trasladados paralelamente). (S5II:306)

R: Porque? (RII:307)

S5: Porque ao trasladarmos duma posição para outra mantém-se as coordenadas. (S5II:308)

R: Porque afirma isso? (RII:309)

S5: Partindo deste pressuposto aqui posso chegar a conclusão. (S5II:310)

.....

Student 7

S7: Bom, se querem o ângulo formado por estas duas rectas... nós temos duas rectas, é no espaço, então nós temos, temos estes três pontos. Então formam os dois segmentos de recta, AB. Terei aqui, terei aqui o ponto A, B e C. São três pontos no espaço. Então querem o ângulo formado pelos segmentos AB e CD. São quatro (pontos) desculpe, são quatro pontos A, B, C e D. Então os segmentos de recta são AB e CD. Então calculei o ângulo formado por estes dois segmentos. Eu considerei este segmento AB sendo um vector. Considerei o vector $\mathbf{u}$ que é o vector $\overrightarrow{AB}$. Este vector aqui será dado pela diferença dos pontos A e B ou B e A tanto faz. É a diferença destes dois pontos. Para (o segmento) CD considerei também sendo um vector, este vector $\mathbf{v}$, vector $\mathbf{v}$. Também será o mesmo este vector aqui será dado pela diferença destes dois pontos C e D. Então, fiz A menos B... será o ponto A, o ponto A, temos -3, 2 e 4... (S7II:7-17)

R: O sr calculou aqui para ganharmos tempo. (RII:18)

S7: Aqui fiz B menos A e D menos C. Pode ser também A menos B e C menos D. Então o que eu fiz, para encontrarmos o ângulo entre estes dois segmentos, ou entre estes dois vectores, eles devem ter um ponto de origem, quer dizer estes devem se intersectar. Se não se intersectarem não há um ângulo formado. Então eu considerei os vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, tendo a mesma origem. Considerei estes dois vectores com a mesma origem. (S7II:19-23)

R: Continue. (RII:24)

S7: Então se dois vectores têm a mesma origem, consideramos não é, então temos este ângulo aqui formado por estes dois vectores, que será o ângulo alfa. O ângulo que queremos determinar. Sendo assim, este ângulo alfa, este ângulo alfa... para determinarmos o ângulo alfa temos que usar esta fórmula, que é o co-seno deste ângulo que é igual ao produto... produto interno destes dois vectores sobre o produto das suas normas. O vector $\mathbf{u}$ já temos e o vector $\mathbf{v}$. A norma, a norma dum vector, por ex a norma do vector $\mathbf{u}$ será a raiz dos valores de x ao quadrado mais o y, o seu somatório ao quadrado, desses valores x, y e z. Também calculei o produto escalar destes dois vectores e obtive 21. Então para encontrar o ângulo alfa, será a função inversa, será arco-seno deste valor aqui. (S7II:25-34)

.....
R: Não sei se tem mais alguma coisa a dizer sobre este exercício? (RII:36)

S7: Bom, esta foi a minha ideia. Uma vez que nos dão quatro pontos, ficaria mais claro se tivessem dado três pontos. Assim, os dois vectores teriam a mesma origem. Seria fácil tirar o ângulo. Mas neste caso nos dão quatro pontos. E por isso eu na prova fiz uma advertência tomando dois vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ com a mesma origem. Caso contrário seria impossível tirar o ângulo entre dois vectores ou segmentos de rectas se eles não se intersectam ou não têm a mesma origem. **(E7 reflectiu antes de aplicação da fórmula. Pois viu que os dois segmentos não se intersectavam e a fórmula foi deduzida com dois vectores que tinham a mesma origem. Intuitivamente criou dois vectores que partiam da mesma origem para poder aplicar a fórmula. Embora esta fórmula sirva para qualquer tipo de segmentos e em qualquer disposição).** (S7II:37-46)

R: É aí aonde queria chegar. Porque aqui nós temos segmentos, que não estão na mesma origem. Agora como consegue traçar o ângulo entre estes dois segmentos que não estão na mesma origem considerando os respectivos vectores aplicados na mesma origem? O que lhe possibilita a fazer isso? Esta relação? Não sei se percebeu a minha pergunta? (RII:47-50)

S7: Estou a ver. (S7II:51)

R: Como disse se fossem três pontos poderíamos traçar os dois vectores e veríamos que estariam na mesma origem. Mas aqui tem dois segmentos e são dois segmentos que não se intersectam num mesmo ponto. O que lhe possibilita a fazer o que fez e ter a certeza que está a achar o ângulo entre estes dois segmentos? (RII:52-55)

S7: (Silêncio). Bom... (silêncio). (S7II:56)

.....
R: Porque converteu segmentos em vectores? (RII:57)

S7: Segmentos em vectores? (S7II:58)

R: Aqui tem os segmentos AB e CD e depois converteu-os em vectores. (RII:59)

S7: Sempre que tivermos dois pontos podemos achar um vector. E sempre que tivermos dois pontos podemos também achar um segmento. E sempre que tivermos dois pontos podemos achar uma recta que passa por eles. **(E7 considera isto como se fosse um axioma?)** (S7II:60-63)

R: E qual é a relação entre um segmento e um vector? (RII:64)

S7: Para achar o vector aqui tive que fazer a diferença dos seus pontos. A diferença de A e de B vai dar um vector. (S7II:65, 66)

R: Há alguma diferença entre um vector e o respectivo segmento? Ou... (RII:67)

S7: (Silêncio). (S7II:68)

R: É mesma coisa? (RII:69)

S7: Há diferença. (S7II:70)

R: Qual é a diferença entre o segmento AB e o vector **AB**? (RII:71)

S7: Por ex nós tendo o segmento AB estamos a considerar o comprimento ou a distância entre dois pontos. Consideramos **AB** como vector já não será, já não será a distância ou comprimento de **AB** mas sim será, quer dizer, (silêncio). Será um vector, será um... quer dizer será... (silêncio). **(E7 tem dificuldades em discernir entre o segmento e o vector).** (S7II:72-75)

R: Um vector tem também um comprimento? (RII:76)

S7: Tem, é a norma do vector. Tem. (Silêncio). (S7II:77)

R: Estes dois segmentos não se intersectam. Não têm um ponto comum. Como é que se traduz isto para vectores aplicados na mesma origem? Como é que isto possibilita para se obter o ângulo entre estes dois segmentos? (RII:78-80)

S7: Bom, é o seguinte. Eu estava a fazer uma confusão. Mas temos... temos os conceitos de vectores colineares e vectores com planares. E que... (Silêncio). Bom, estes dois vectores, estes dois vectores que encontrei aqui são vectores com planares. Com planares porque os dois encontram-se ... os dois vectores encontram-se num mesmo plano. (S7II:81-84)

R: Os vectores **AB** e **CD** estão no mesmo plano? (RII:85)

S7: Não. Considerando estes dois vectores no mesmo plano, então podemos considerar os dois vectores com planares. Se esses dois vectores são com planares, então são com planares... (S7II:86, 87)

R: Continue. (RII:88)

S7: Então podemos... podemos considerar os vectores como... como tendo o mesmo ponto de partida. Isto é podemos considerar estes dois vectores como tendo a mesma origem. (S7II:89, 90)

R: Continue. (RII:91)

S7: Sendo assim, estes vectores são com planares, estão no mesmo plano e na mesma origem. Sendo assim podemos achar o ângulo entre estes dois vectores. **(E7 procura apresentar sempre uma explicação para os conceitos envolvidos. Embora os conceitos não sejam generalizáveis como neste caso em que afirma que vectores com planares necessariamente se intersectam. E7 parece estar no performance**

orientation. Resolve bem os exercícios mas não sabe o significado correcto dos conceitos usados). (S7II:92-100)

R: Mais alguma coisa? (RII:101)

S7: Nada. (S7II:102)

WILEY